SERIE UNIVERSITARIA
PATRIA
Teoría, ejemplos y problemas

CD
interactivo en esta edición

MATEMÁTICAS aplicadas

a las ciencias económico-administrativas

Adelfo Segura Vásquez

GRUPO EDITORIAL PATRIA

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS ECONÓMICO-ADMINISTRATIVAS

Simplicidad matemática

GRUPO EDITORIAL PATRIA

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS ECONÓMICO-ADMINISTRATIVAS

Simplicidad matemática

Adelfo Segura Vásquez

Escuela Superior de Comercio y Administración
Escuela Superior de Turismo
Instituto Politécnico Nacional

PRIMERA EDICIÓN EBOOK
MÉXICO, 2014

GRUPO EDITORIAL PATRIA

Para establecer comunicación con nosotros puede hacerlo por:

correo:
Renacimiento 180, Col. San Juan Tlihuaca, Azcapotzalco, 02400, México, D.F.

fax pedidos:
(01 55) 5354 9109 • 5354 9102

e-mail:
info@editorialpatria.com.mx

home page:
www.editorialpatria.com.mx

Dirección editorial: Javier Enrique Callejas
Coordinación editorial: Verónica Estrada Flores
Producción: Gerardo Briones González
Diseño de interiores y portada: Juan Bernardo Rosado Solís/Signx
Revisión técnica: Alex Polo Velázquez
UAM-Azc.
Ilustraciones: Gustavo Vargas M. y Jorge Martínez J.
Fotografías: © Thinkstockphoto
Diagramación: Gustavo Vargas M. y Jorge Martínez J.

Matemáticas aplicadas a las ciencias económico-administrativas.
Simplicidad matemática
Derechos reservados:
© 2014, Adelfo Segura Vásquez
© 2014, GRUPO EDITORIAL PATRIA, S.A. DE C.V.
Renacimiento 180, Colonia San Juan Tlihuaca
Delegación Azcapotzalco, Código Postal 02400, México, D.F.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana
Registro Núm. 43

ISBN ebook: 978-607-438-852-7

Queda prohibida la reproducción o transmisión total o parcial del contenido de la presente obra
en cualesquiera formas, sean electrónicas o mecánicas, sin el consentimiento previo y por escrito del editor.

Impreso en México
Printed in Mexico

Primera edición ebook: 2014

Agradecimientos

Quiero dar las gracias a Dios por permitirme realizar uno de los máximos anhelos del hombre, transcender en la vida, dejando una pequeña marca en este camino.

Agradezco a todos aquellos que ya no están, que dedicaron de su tiempo para apoyarme y aquellos que están espero que estas líneas les sean de utilidad.

Quiero agradecer a mi familia el tiempo y la paciencia que permitieron escribir estas páginas… a mi futura esposa y mis bebitos les dejo este legado que sé que algún día leerán tratando de entender lo simple que las matemáticas pueden ser.

A mis amigos les ofrezco el contenido que en este libro está vertido y si alguien en la lista me faltó sepan que desde aquí la simplicidad de las matemáticas les ofrezco yo.

Semblanza autoral

Adelfo Segura Vásquez

Es Contador Público egresado de la Escuela Superior de Comercio y Administración del Instituto Politécnico Nacional (IPN), tiene estudios de posgrado en Alta Dirección de Empresas Turísticas, reconocido con la carta al desempeño escolar de excelencia.

Destacado catedrático en asignaturas cuantitativas desempeñándose al frente de la jefatura de Administración Financiera, Contabilidad y Ciencias Exactas. Es autor de contenido en las asignaturas de cálculo y contabilidad financiera de la Unidad Tecnológica Educativa y Campus Virtual de la Escuela Superior de Turismo del IPN en la modalidad mixta.

El contacto con las nuevas generaciones se palpa en su rol como profesor de innovación educativa, iniciando en la Escuela Superior de Comercio y Administración en la Unidad Santo Tomás del IPN e institutos incorporados.

A nivel medio superior, fue integrante de la academia de ciencias exactas impartiendo clases de álgebra. Actualmente es docente presencial y virtual en áreas de conocimiento de Contabilidad y Matemáticas en la Escuela Superior de Turismo y jefe de asignatura en la materia de Cálculo en el turno vespertino dentro del mismo instituto.

Su compromiso con la formación docente le ha llevado a conducir talleres y cursos como:

- Curso Taller con el apoyo de las Tecnologías de la Información y Comunicación "Jugando aprendemos matemáticas".
- Cursos de nivelación para jóvenes universitarios en contabilidad ("Contabilidad para no contadores") y matemáticas ("Matemáticas para no ingenieros").

Es un buscador incansable de la mejora continua por lo cual se actualiza permanentemente; por mencionar algunos diplomados, cursos y talleres:

- Diplomado en Formación y Actualización Docente para un Nuevo Modelo Educativo.
- Taller de Indicadores para la Evaluación Continua en el Marco del Nuevo Modelo Educativo.
- Curso-taller "Diseño curricular con enfoque de competencias".
- Curso "Profesores, asesores y tutores en línea".
- Los blogs como repositorios de recursos digitales.
- Formación en herramientas de mejora continua; en elaboración de recursos digitales para utilizarse en plataformas virtuales.

Prólogo

"Lo espantoso de los números es su sencillez al formar cadenas de razonamientos, prácticas y fáciles cuando se conoce la simplicidad de las matemáticas"

Matemáticas aplicadas a las ciencias económico-administrativas tiene el propósito de enseñar de una manera simple una materia considerada compleja al permitir que el conocimiento sea asequible y aplicable en diferentes situaciones de la vida cotidiana; para lograrlo el libro proporciona metodologías estructuradas definidas de solución, aplicadas paso a paso en ejercicios propuestos.

Partimos del enfoque educativo por competencias desde un sustento constructivista en el que se potencializa el saber hacer en la práctica pero que motiva el aprendizaje significativo que se transfiere a situaciones de la vida real y que implica la interpretación a través de ecuaciones para la solución de los problemas.

En consecuencia a lo anterior, el método didáctico de la obra conducirá al estudiante a que entienda y después ponga en práctica sus conocimientos, ya que su contenido se ha programado cuidadosamente en una secuencia de ejercicios que presentan una solución a lo largo de las unidades indicándose en cada una el aspecto sobresaliente de la aplicación del tema.

Así su estructura se encuentra delimitada de la siguiente manera:

- En la primera unidad encontrarás la recta, la pendiente, aplicaciones económico-administrativas y algo más.
- En la dos, nos adentraremos en el procedimiento de las ecuaciones de segundo grado, sus fórmulas, representaciones y gráficas, aplicando este conocimiento al ámbito económico-administrativo.
- En la tres encontrarás límites y sus explicaciones de cuando tiende a cero y cuando al infinito.
- En la cuatro estudiaremos derivadas por cuatro pasos, la recta tangente, los máximos y mínimos, así como los marginales y su interpretación.
- En la quinta unidad encontrarás al mundo del cálculo integral, integrando funciones y resolviendo problemas de totalizadores.
- En la sexta encontrarás contenido de álgebra lineal y podrás ubicar la solución de la inversa de una matriz por varios métodos, así como la solución del sistema de ecuaciones de dos y tres incógnitas, todo ello dispuesto con un seguimiento de pasos estructurados que te permitirán incursionar en el espantoso mundo de los números y entenderlo pues tienes en tus manos la simplicidad de las matemáticas.

Éxito en la vida, tu amigo…
Simplicidad matemática

Contenido

UNIDAD 1 La ecuación lineal: la recta, pendiente, fórmulas y aplicaciones administrativas (Ingreso, Costo, Utilidad, P.E.) 1

1.1 Introducción 2
1.2 Línea recta 2
1.3 Plano cartesiano 2
1.4 Pendiente de una recta 3
1.5 Problemas tipo resueltos del cálculo de la pendiente de una recta 4
1.6 Fórmulas de la línea recta 5
1.7 Ecuación de la recta punto pendiente 6
1.8 Ecuación de la recta dados dos puntos 9
1.9 Obtención de *m* y *b* de la forma general de la recta 13
1.10 Solución de un sistema de ecuaciones por Suma y Resta o Eliminación 15
1.11 Solución de un sistema de ecuaciones por Método de Igualación 17
1.12 Solución de un sistema de ecuaciones por Método de Sustitución 18
1.13 Solución de un sistema de ecuaciones por Método de Determinantes 20
1.14 Solución de un sistema de ecuaciones por el Método gráfico 22
1.15 Solución de un sistema de tres ecuaciones por el Método de Eliminación 24
1.16 Aplicaciones lineales 27
1.17 Punto de equilibrio en el mercado 35
Problemas para resolver 38
Problemas reto 41

UNIDAD 2 La ecuación cuadrática: la curva, la parábola, el vértice y las aplicaciones administrativas de Máximos y Mínimos 43

2.1 Introducción 44
2.2 El radical 44
2.3 Raíz cuadrada 44
2.4 Características de la raíz cuadrada 44
2.5 Ecuación cuadrática 44
2.6 Fórmula general de segundo grado 44
2.7 Representación gráfica de una función de segundo grado 50
2.8 Parábola 53
2.9 Integración de la parábola con vértice en el origen 54
2.10 Parábolas con vértice en el origen 54
2.11 Parábolas con vértice fuera del origen (*h*, *k*) 59
2.12 Ecuación general de la parábola 65
2.13 Obtención de la ecuación estándar partiendo de su forma general 67
2.14 Obtención de máximos y mínimos, aplicaciones de la parábola 69
2.15 Punto de equilibrio en el mercado 76
Problemas para resolver 80
Problemas reto 83

UNIDAD 3 Límites (laterales, infinitos y ceros), su resolución analítica y aritmética. La continuidad o discontinuidad de funciones 85

3.1 Introducción 86
3.2 Límite 86
3.3 Límites laterales 86
3.4 Teoremas de los límites 89
3.5 Los límites y su solución 91
3.6 Límites que tienden a cero en funciones polinomiales 99
3.7 Límites que tienden a infinito en funciones polinomiales 101
3.8 Aplicaciones de los límites 103

3.9 Continuidad 107
3.10 Condiciones de continuidad 107
3.11 Continuidad o discontinuidad de funciones 107
Problemas para resolver 111
Problemas reto 113

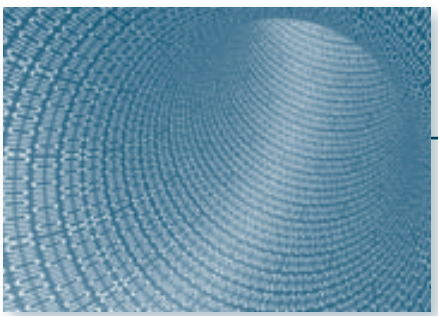
UNIDAD 4 Las derivadas, la recta tangente, los 4 pasos, los marginales, la aplicación administrativa (Máximos, Mínimos y puntos de Inflexión) 115

4.1 Introducción 116
4.2 Derivada 117
4.3 La derivada por 4 pasos 118
4.4 La pendiente de una recta tangente 124
4.5 Primera derivada (la aplicación de sus reglas) 128
4.6 Reglas de derivación 129
4.7 Representación e Interpretación de las fórmulas de derivación 130
4.8 Derivadas de Suma y Resta 132
4.9 Multiplicación de derivadas 134
4.10 Derivada de cocientes 136
4.11 Derivadas de potencias 138
4.12 Prueba de la primera derivada 140
4.13 La segunda derivada 147
4.14 Criterio de la segunda derivada 148
4.15 Aplicaciones económicas administrativas 154
4.16 El análisis marginal 157
Problemas para resolver 165
Problemas reto 167

UNIDAD 5 Integrales, integral definida, totalizadores, excedentes de productor y consumidor 169

5.1 Introducción 170
5.2 Integral 170
5.3 Reglas de integración 170

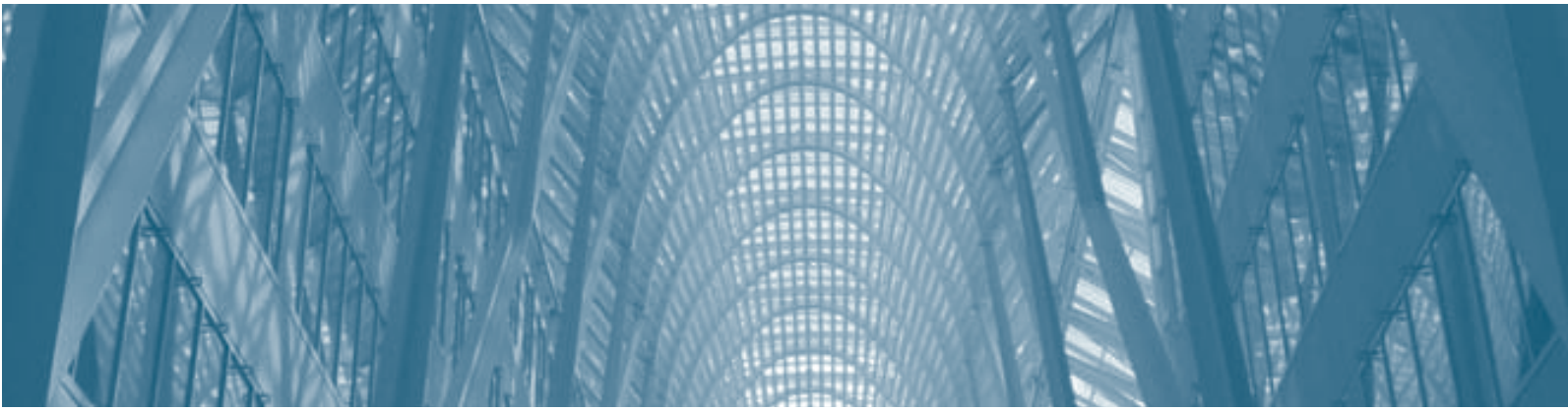
5.4 Reglas especiales de integración 180
5.5 Integral definida 188
5.6 Excedente de consumidor 191
5.7 Excedente del productor 194
5.8 Ambas variables desconocidas 198
5.9 La integral un proceso totalizador 199
Problemas para resolver 206
Problemas reto 208



UNIDAD 6 **Operaciones matriciales, determinantes, cofactores e inversa de matrices** **209**

6.1 Introducción 210
6.2 Matriz de datos 210
6.3 Tipos de matrices 210
6.4 Transposición de matrices 211
6.5 Suma o resta de matrices 212
6.6 Multiplicación de una matriz por un escalar 215
6.7 Multiplicación de matrices 216
6.8 Determinante de una matriz 223
6.9 Método de cofactores 227
6.10 Inversa de una matriz (el empleo de la transposición y los cofactores) 234
6.11 Método de Gauss-Jordan 244
6.12 Método de Gauss-Jordan (soluciones de sistemas de ecuaciones) 254
Problemas para resolver 260
Problemas reto 263

UNIDAD 1



La ecuación lineal: la recta, pendiente, fórmulas y aplicaciones administrativas (Ingreso, Costo, Utilidad, P.E.)

OBJETIVOS

- Conocer las distintas fórmulas de la línea recta.
- Ubicar el valor de la pendiente.
- Diferenciar entre un problema punto pendiente de uno de dos puntos.
- Conocer las distintas soluciones de un problema de dos y tres variables.
- Diferenciar entre un problema de dos y tres variables.
- Identificar las distintas aplicaciones administrativas.
- Interpretar los resultados de una ecuación lineal.

¿QUÉ SABES?

- ¿Sabes ubicar la coordenada de un punto en el plano cartesiano?
- ¿Qué entiendes por pendiente?
- ¿Cómo calculo los helados que puedo vender el día de mañana?
- Para que mi amigo heladero no gane ni pierda, ¿cuántos helados debe vender?
- ¿Cómo puedo saber el precio de algo si compré dos cosas diferentes?
- ¿Se obtiene Utilidad en un Punto de Equilibrio?
- ¿Cuando una empresa no produce existen costos?

1.1 Introducción

En la vida cotidiana un camino en línea recta es más rápido que un camino que presenta curvas, razón por la cual la definición nos indica que el camino más corto entre dos puntos es una línea recta. Cuando ese camino presenta una inclinación se dice que tiene una pendiente.

1.2 Línea recta

La línea recta es una de las primeras formas utilizadas para resolver problemas lineales con dos incógnitas, para lo cual, primero es necesario ubicar los 2 puntos en la línea recta, pues estos se ubican dentro de su definición, la cual dice: "Línea recta es la distancia más corta entre dos puntos".

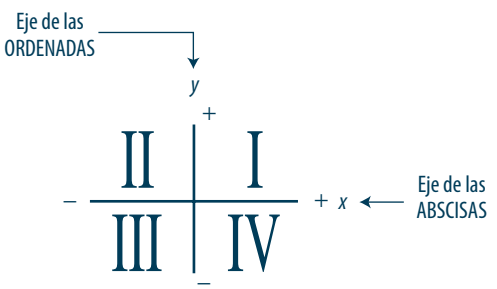
Lo anterior es lógico de pensarse porque si solo conocemos un punto no podemos trazarla, pero cuando conocemos los dos puntos es fácil poder ubicarla; por lo general, para trazar una línea recta se utiliza el plano cartesiano.

1.3 Plano cartesiano

Es un plano de cuatro cuadrantes en el que se ubican puntos coordenados que se logran representar por la relación de dos ejes perpendiculares entre sí: el horizontal para las *x* o eje de las abscisas y el vertical para las *y* o eje de las ordenadas.

Alerta

Es muy importante siempre tener presente que un punto coordenado es (*x*, *y*).



# de cuadrante	Signo *x*	Signo *y*
I cuadrante	+	+
II cuadrante	–	+
III cuadrante	–	–
IV cuadrante	+	–

Como se puede observar en la representación del plano cartesiano, existen cuatro posiciones de signo, dos positivos y dos negativos, con lo cual se ubican puntos coordenados.

Punto coordenado

Es un punto en el plano que se forma por el encuentro entre un valor *x* y un valor *y*; su representación siempre es (*x*, *y*), hay que considerar que primero se coloca *x*.

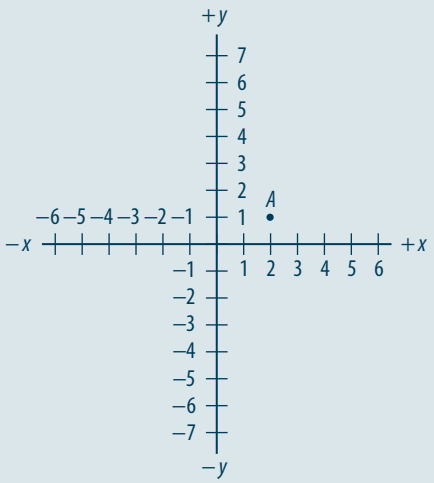
- Para el cuadrante número **II,** primero se coloca el signo negativo, ya que *x* es negativa y después el positivo, por ser *y* positiva.
- En el cuadrante número **IV**, primero se pone el signo positivo de *x* y después el negativo de *y*.

Como se observa en los siguientes problemas resueltos, para ubicar un punto en específico en el plano se utilizan las coordenadas del punto, ubicándose primero la abscisa *x* seguida de la ordenada *y*.

Problema resuelto

Graficar el siguiente punto coordenado (+2, +1).

Respuesta

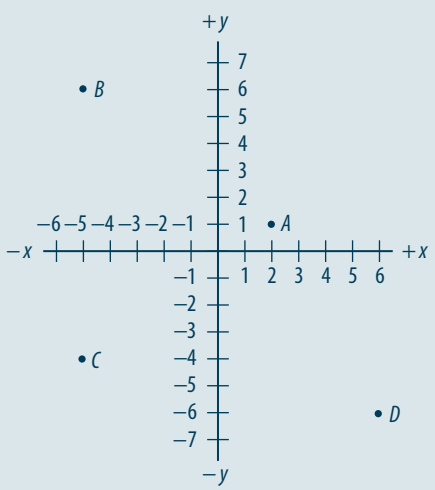


	Valor de *x*	Valor de *y*	Punto coordenado
A	+2	+1	(+2, +1)

Problema resuelto

Graficar los siguientes puntos coordenados (+2, +1), (−5, +6), (−5, −4), (+6, −6).

Respuesta



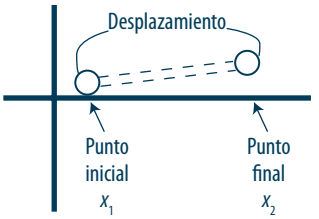
	Valor de *x*	Valor de *y*	Punto coordenado
A	+2	+1	(+2, +1)
B	−5	+6	(−5, +6)
C	−5	−4	(−5, −4)
D	+6	−6	(+6, −6)

1.4 Pendiente de una recta

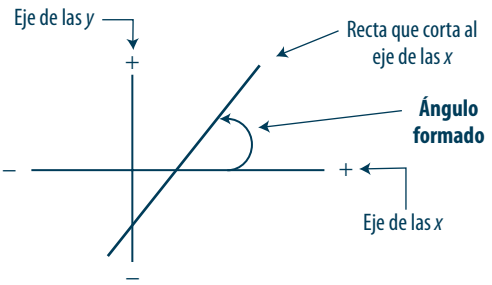
La pendiente de una recta puede ser interpretada como la razón de cambio algebraico de un incremento o decremento a medida que un punto dado se mueve a lo largo de una recta en uno u otro sentido.

La pendiente se representa por *m*, la pendiente es la tangente del ángulo de inclinación.

Si conocemos los puntos de la recta, también, podemos determinar su pendiente, dado que esta se define como el grado de "incremento o decremento", de "avance o retroceso" de un punto en el plano. Es decir, si se sitúa un punto (inicial) y después ese mismo punto experimenta un cambio, moviéndose del "punto uno o inicial" al "punto dos o final", a dicho movimiento se le llama desplazamiento y matemáticamente hablando, a esa inclinación se le llama pendiente.



La pendiente de una recta y su ángulo de inclinación se ejemplifican a continuación:

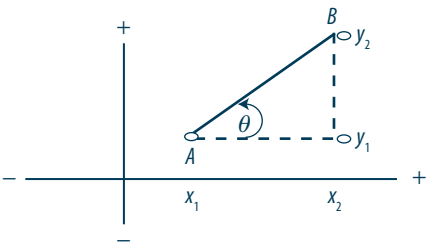


Como se observa un ángulo es aquel que se forma al cortar con una línea recta el eje de las x.

Cuando este se encuentra formado debe ser medido en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Su medición inicia sobre el eje de las *x* y concluye en la línea recta que corta al eje.

Matemáticamente, la pendiente se representa como se muestra a continuación:



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

A la diferencia entre el punto final y_2 y el punto inicial y_1, se le define como la parte **y** de la pendiente y la relación de ambas se denomina **pendiente de recta**.

De modo que la relación de diferencias mostradas en un cociente, tanto de *x* como de *y*, integrará la fórmula de la pendiente; la cual es representada por la letra "*m*".

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Solo que en la fórmula de la pendiente se necesita tanto x_1 y x_2 como y_1 y y_2, cabe preguntar: ¿quién es cada uno?

La respuesta es sencilla: el primer punto coordenado que se indique en la redacción del problema será (x_1, y_1) y el segundo punto (x_2, y_2); de modo que para obtener el valor de la pendiente bastará con introducir los coeficientes numéricos en la fórmula de *m*, como se observa en los siguientes problemas resueltos.

1.5 Problemas tipo resueltos del cálculo de la pendiente de una recta

Problema resuelto

Obtener el valor de la pendiente si se tienen los siguientes puntos (2, 4) y (3, 6).

Respuesta

Como el primer punto es (2, 4), este es (x_1, y_1) y (3, 6) es (x_2, y_2)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 4}{3 - 2} = \frac{2}{1} = 2$$

Pendiente positiva

Problema resuelto

Obtener el valor de la pendiente si se tienen los siguientes puntos (1, 4) y (5, 2).

Respuesta

Como el primer punto es (1, 4), este es (x_1, y_1) y (5, 2) es (x_2, y_2)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 4}{5 - 1} = \frac{-2}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

← Pendiente negativa

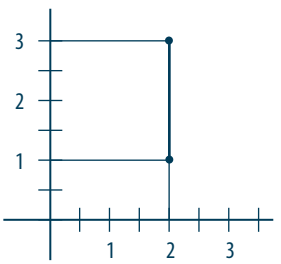
Casos donde no hay pendiente

Cuando los valores de *x* son iguales, la recta es perpendicular al eje *X*, por lo que su pendiente, ***m***, no está definida.

Se tienen los siguientes puntos: (2, 1) (2, 3)

(x_1, y_1) (x_2, y_2)

$$m = \frac{3 - 1}{2 - 2} = \frac{2}{0}$$ No está definida

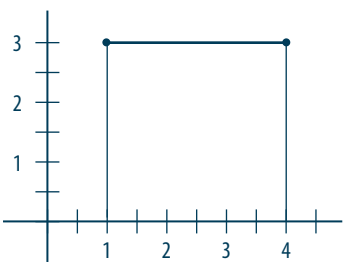


Cuando los valores de *y* son iguales, la recta es paralela al eje *X* y su ***m*** es ***cero***.

Se tienen los siguientes puntos: (1, 3) (4, 3)

(x_1, y_1) (x_2, y_2)

$$m = \frac{3 - 3}{4 - 1} = \frac{0}{3} = 0$$



Alerta

Cuando los valores de *x* o *y* son iguales no hay pendiente.

1.6 Fórmulas de la línea recta

Al entender la información anterior, lograremos identificar las fórmulas de la línea recta.

Fórmula de punto pendiente

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Esta fórmula se utilizará cuando en la redacción del problema se indique que se conoce la pendiente y un punto dado.

Fórmula de dos puntos

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Esta fórmula se utiliza cuando se tienen dos puntos coordenados, siendo en base a las diferencias de valor el cálculo de la pendiente *m*.

condiciones

$x_1 \neq x_2$ $y_1 \neq y_2$

Un dato importante es que para obtener el valor de la pendiente siempre se deberá cumplir con las condiciones aquí expuestas, en caso contrario como se indicó antes no habrá pendiente, por no estar definida o valer cero.

Fórmula pendiente y ordenada al origen $y = mx + b$	En esta fórmula el valor de "b" recibe el nombre de ordenada al origen, utilizándose esta fórmula cuando en la redacción del problema a resolver, se indique que se conoce la pendiente y el punto de intersección con el eje *y*.
Fórmula general de la recta $Ax + By + C = 0$	Es la representación general de todas las rectas, habitualmente esta se obtiene al final, ya que se obtiene al despejar e igualar a 0, en donde A, B y C son constantes.

Las fórmulas lineales son empleadas para dar solución a una amplia gama de planteamientos destacándose entre ellos los económico-administrativos, problemas cuantitativos lineales; entendiéndose por lineales los expresados a exponente uno; es decir, aquellos que sobre su incógnita se encuentra la primera potencia o el exponente uno.

1.7 Ecuación de la recta punto pendiente

Para dar solución a un problema de punto pendiente se recomienda seguir los siguientes pasos:

Paso 1: Identificar el punto coordenado del problema

Primero, debe localizarse el punto coordenado que se encuentra en la redacción del problema, algunas veces está implícito en la redacción del planteamiento, pero siempre se da.

Paso 2: Ubicar el valor de la pendiente del problema

Dado que la pendiente es la inclinación de la recta, esta puede encontrarse en la redacción del problema o estar representada con un valor dado, de cualquier manera estará siempre ligada a la variable *x*.

Paso 3: Obtener la ecuación de la recta o su representación gráfica

Para obtener la ecuación de la recta sustituimos los valores.

Para graficar tabulamos las incógnitas; asignando valores arbitrarios a la variable *x*; entendiéndose por arbitrario cualquier número real ($\Re$) con el fin de obtener el valor de la variable *y*.

Observa la aplicación de los pasos expuestos.

Problema resuelto

Determinar la ecuación de la recta con pendiente m -0.2 y que pasa por el punto (x_1, y_1) (500, 120)

Respuesta

La fórmula utilizada es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 120 = -0.2(x - 500)$$
$$y - 120 = -0.2x + 100$$
$$y = -0.2x + 100 + 120$$
$$y = -0.2x + 220$$

$y = mx + b$
$y = -0.2x + 220$
Solución: Pendiente y ordenada al origen

$Ax + By + C = 0$
$0.2x + y - 220 = 0$
Solución: General de la recta

Puede observarse que del resultado de un ejercicio de punto pendiente se obtiene la forma pendiente y ordenada al origen y al despejar e igualar a cero se llega a la forma general.

Problema resuelto

Determinar la ecuación de la recta con pendiente −10 y que pasa por el punto (−10, +80), obtener

a) La ecuación de la recta,
b) Las intersecciones con los ejes *x*, *y*
c) La gráfica de la ecuación de la recta.

Respuesta

a) $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 80 = -10(x - [-10])$

$y - 80 = -10(x + 10)$

$y - 80 = -10x - 100$

$y = -10x - 100 + 80$

$y = -10x - 20$

b) Al darle valor de cero a la variable *y* obtenemos la intersección con *x*.

$y = -10x - 20$

$(0) = -10x - 20$

$+20 = -10x$

$\frac{+20}{-10} = x$

$-2 = x$

El punto coordenado (−2, 0)

Al darle valor de cero a la variable *x* obtenemos la intersección con *y*.

$y = -10x - 20$

$y = -10(0) - 20$

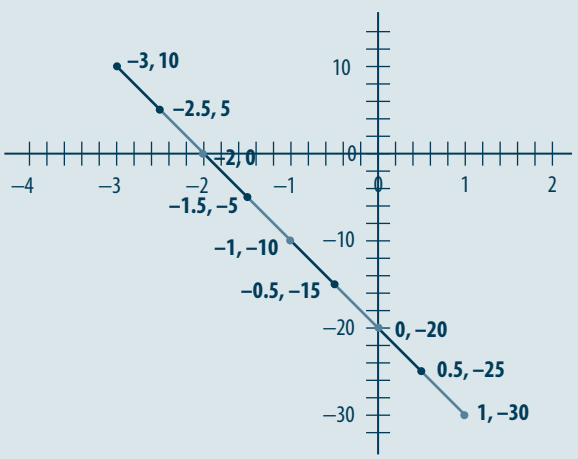
$y = -20$

El punto coordenado (0, −20)

c)

$-10x - 20 = y$	Valor *x*	Valor *y*
$(-3) =$	−3	10
$(-2) =$	−2	0
$(-1.5) =$	−1.5	−5
$(0) =$	0	−20
$(1) =$	1	−30

$-10x - 20 = y$
$-10(0) - 20 = y$
$-20 = y$



Problema resuelto

Determinar la ecuación de la recta con pendiente 2 y punto (−5, −5), obtener

a) La ecuación de la recta,
b) La ecuación en su forma general,
c) Las intersecciones con los ejes x, y
d) La gráfica.

Respuesta

a) $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - [-5] = 2(x - [-5])$

$y + 5 = 2(x + 5)$

$y + 5 = 2x + 10$

$y = 2x + 10 - 5$

$y = 2x + 5$

b) $0 = 2x - y + 5$

c) La intersección con el eje x

$y = 2x + 5$

$(0) = 2x + 5$

$+5 = 2x$

$\frac{+5}{2} = x$

$2.5 = x$ (2.5, 0)

La intersección con el eje y

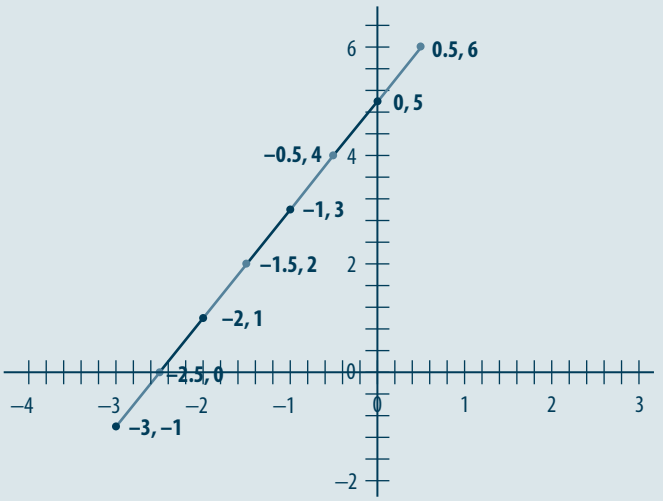
$y = 2x + 5$

$y = 2(0) + 5$

$y = +5$ (0, 5)

d)

$2x + 5 = y$		Valor x	Valor y
(−3)	=	−3	−1
(−2.5)	=	−2.5	0
(−1.5)	=	−1.5	+2
(0)	=	0	+5
(0.5)	=	0.5	+6



1.8 Ecuación de la recta dados dos puntos

Un punto coordenado *x*, *y* es la relación entre dos variables bien identificadas, tales como latitud con longitud, personas con dinero, bienes con cantidad de producción, objetos con consumidores y a cada incógnita se le identificará por una actividad específica.

Su representación se dará por la relación de esas dos variables o actividades bien definidas, formando los puntos coordenados de acuerdo al planteamiento del problema.

Para dar solución a un problema de dos puntos se recomienda seguir los siguientes pasos:

Paso 1: Identificar los datos presentados en la redacción del problema

Se deben identificar las dos variables presentes en la redacción del problema, estas integrarán los dos puntos coordenados del problema.

Por ejemplo: En una tienda de regalos el supervisor ha observado que cuando el precio de un producto es de $20.00, los clientes compran 200 productos, pero cuando el precio se duplica compran solo 120 productos.

Las variables identificadas son:

- Primera variable *precio del producto*.
- Segunda variable *unidades vendidas*.

De acuerdo con lo anterior, concluimos que *precio* y *unidades* son las variables identificadas en la redacción del problema.

Alerta

El identificar las dos variables indicadas en la redacción del planteamiento es esencial para dar solución a un problema de dos puntos.

Paso 2: Tipificar variables

Este paso consiste en identificar cuál se llamará *x* y cuál *y*. Si decides identificar a las unidades vendidas como primera variable *x*, los dos puntos llamados precios entonces serán *y*.

Paso 3: Integración y cálculo de los puntos coordenados

Como ya está asignada la variable a cada dato y se sabe que cada punto se forma por la relación (*x*, *y*), por tanto, los puntos serán: (200, 20) y (120, 40)

(x, y)
(unidades, precio)
(200, 20)
(120, 40)

Los datos del problema

(200, 20) Es el primer punto dado en la redacción del problema por ello es (x_1, y_1)

Al identificar los puntos, sustituimos sus valores en la fórmula de dos puntos

$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ obteniendo la ecuación de recta, el valor de la pendiente, los puntos por donde pasa la recta, el valor de la ordenada al origen, las posibles proyecciones, entre otros datos.

Observa la aplicación de los pasos expuestos.

Problema resuelto

En una tienda de regalos el supervisor ha observado que cuando el precio de un producto es de $20.00, los clientes compran 200 productos, pero cuando el precio se duplica solo compran 120 productos.

Alerta

En un problema de dos puntos no se conoce la pendiente, aquí se calcula.

Respuesta

(x, y) ← Paso 1) Identificación de los datos.

(unidades, precio) ← Paso 2) Tipificar variables.

(200, 20)
(120, 40) } Datos ← Paso 3) Integración y cálculo de los puntos coordenados.

En este caso, se aplica la fórmula de dos puntos, ya que no podemos utilizar la fórmula de punto y pendiente, pues desconocemos la pendiente.

La aplicación de los datos en la fórmula y la resolución del problema

Fórmula de los dos puntos:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 20 = \frac{40 - 20}{120 - 200}(x - 200)$$

$$y - 20 = \frac{20}{-80}(x - 200)$$

$$y - 20 = -0.25(x - 200)$$

RECUERDA:
El -0.25 está multiplicando a todo el paréntesis.

$$y - 20 = -0.25x + 50$$
$$y = -0.25x + 50 + 20$$
$$y = -0.25x + 70$$

Valor de la pendiente

Problema resuelto

Con base en los siguientes puntos (1, 1) y (2, 3), obtener

a) La ecuación de la recta
b) Las intersecciones con los ejes
c) La gráfica de las intersecciones

Respuesta

(x, y)
(1, 1)
(2, 3) } Los datos del problema

a) $$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 1 = \frac{3 - 1}{2 - 1}(x - 1)$$

$$y - 1 = \frac{2}{1}(x - 1)$$

$$y - 1 = 2(x - 1)$$
$$y - 1 = 2x - 2$$
$$y = 2x - 2 + 1$$
$$y = 2x - 1$$

Respuesta (*continuación*)

b) Al darle valor de cero a la variable x obtenemos la intersección con y

$y = 2x - 1$
$y = 2(0) - 1$
$y = -1$
El punto coordenado $(0, -1)$

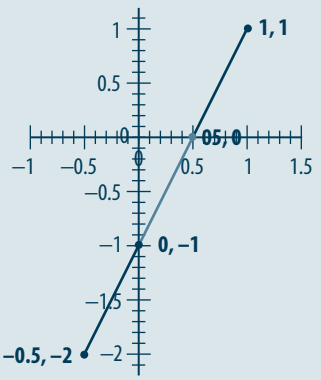
Al darle valor de cero a la variable y obtenemos la intersección con x

$y = 2x - 1$
$(0) = 2x - 1$
$+1 = 2x$
$\frac{+1}{2} = x$
$0.5 = x$
El punto coordenado $(0.5, 0)$

c)

$2x - 1 = y$		Valor x	Valor y
(-1)	=	-1	-3
(-0.5)	=	-0.5	-2
(0)	=	0	-1
$(+0.5)$	=	$+0.5$	0

$2x - 1 = y$
$2(-0.5) - 1 = y$
$-2 = y$



Problema resuelto

Una supervisora en su primer día de trabajo verificó su base de datos, encontrando registros del cuarto mes por $799 958.00, y del sexto mes por $801 160.00, si planea una proyección en ventas: ¿Cuánto venderá en el mes patrio? y ¿Cuánto en diciembre?

Respuesta

(x, y)
(mes, registro de ventas)
(mes 4 Abril, 799 958)
(mes 6 Junio, 801 160)
} Los datos del problema

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 799\,958 = \frac{801160 - 799\,958}{6 - 4}(x - 4)$$

$$y - 799\,958 = \frac{1202}{2}(x - 4)$$

$$y - 799\,958 = 601(x - 4)$$
$$y - 799\,958 = 601x - 2\,404$$
$$y = 601x - 2\,404 + 799\,958$$
$$y = 601x + 797\,554$$

Respuesta (*continuación*)

Para realizar una tendencia y conocer la proyección de las ventas, bastará con sustituir el mes deseado en la variable correspondiente.

Ecuación de la recta $y = 601x + 797\,554$

Proyección de ventas para septiembre

$$y = 601(9) + 797\,554 \rightarrow 802\,963.00$$

espera vender en septiembre

Proyección de ventas para diciembre

$$y = 601(12) + 797\,554 \rightarrow 804\,766.00$$

espera vender en diciembre

Problema resuelto

En una tienda se compran cuatro artículos por $10.00 y ocho por $15.00, si x representa el artículo a comprarse y el dinero que se paga es y; obtener

a) La ecuación de la recta que representa el problema
b) Con $20.00 cuántas unidades puedo adquirir
c) Las intersecciones con los ejes
d) La gráfica del problema

Respuesta

(x, y)

(artículo, lo pagado)

$(4, 10)$
$(8, 15)$ } Los datos del problema

a) $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

$$y - 10 = \frac{15 - 10}{8 - 4}(x - 4)$$

$$y - 10 = \frac{5}{4}(x - 4)$$

$$y - 10 = +1.25(x - 4)$$
$$y - 10 = +1.25x - 5$$
$$y = +1.25x - 5 + 10$$
$$y = +1.25x + 5$$

Con $20.00 adquiero:

b) $y = +1.25x + 5$

$$20 = +1.25x + 5$$
$$20 - 5 = +1.25x$$
$$15 = +1.25x$$
$$\frac{15}{1.25} = x$$
$$12 = x$$

Las unidades se conocen al sustituir el dato del problema en la variable correspondiente.

En este caso la variable y es el dinero que se paga por eso sustituimos 20 en esta incógnita.

Se adquieren 12 artículos con $20.00

Respuesta (*continuación*)

c) Al darle valor de cero a la variable *x* obtenemos la intersección con *y*

$$y = +1.25x + 5$$
$$y = +1.25(0) + 5$$
$$y = +5$$

El punto coordenado (0, +5)

Al darle valor de cero a la variable *y* obtenemos la intersección con *x*

$$y = +1.25x + 5$$
$$(0) = +1.25x + 5$$
$$-5 = +1.25x$$
$$\frac{-5}{+1.25} = x$$
$$-4 = x$$

El punto coordenado (−4, 0)

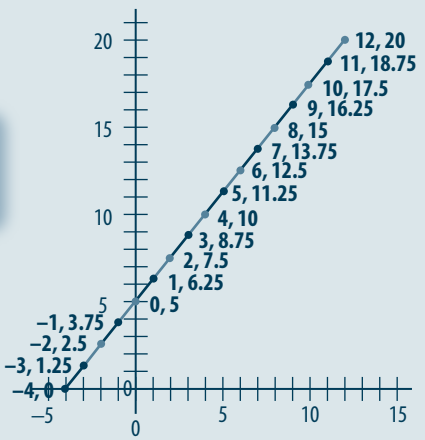
Como se indicó al dar solución a un ejercicio de recta se obtiene $y = mx + b$ la ecuación de pendiente y ordenada al origen, misma que es utilizada para graficar al asignarle valores arbitrarios a la variable *x*; entendiéndose por arbitrario cualquier número real ($\Re$) con el fin de obtener el valor de la variable *y*.

Al obtener ambos valores, estos se presentan en puntos coordenados (*x*, *y*) graficándose.

d)

$+1.25x + 5 = y$		Valor *x*	Valor *y*
(−4)	=	−4	0
(−1)	=	−1	3.75
(0)	=	0	5
(10)	=	10	17.5
(12)	=	12	20

$$1.25x + 5 = y$$
$$1.25(0) + 5 = y$$
$$5 = y$$



Como se indicó al igualar a cero la forma de pendiente y ordenada al origen es como se llega a la forma general $Ax + By + C = 0$ donde A, B y C son constantes, valores que utilizaremos para obtener la pendiente *m* y ordenada al origen *b*.

1.9 Obtención de *m* y *b* de la forma general de la recta

Para dar solución se recomienda seguir los siguientes pasos:

Paso 1: Obtención de m pendiente

Para obtener el valor de la pendiente se utilizan los coeficientes numéricos con todo y signo de los términos A y B relacionándolos en el cociente

$$m = \frac{-A}{B}$$

Paso 2: Obtención de la ordenada al origen b

Para obtener el valor de la ordenada al origen se utilizan los coeficientes numéricos con todo y signo de los términos C y B relacionándolos en el cociente

$$b = \frac{-C}{B}$$

Problema resuelto

Obtener la pendiente y la ordenada al origen de la forma general $\overset{A}{0.2}x + \overset{B}{y} - \overset{C}{220} = 0$

Respuesta

Obtención de m

$$m = \frac{-A}{B} = \frac{-(0.2)}{1} = -0.2$$

Obtención de b

$$b = \frac{-C}{B} = \frac{-(-220)}{1} = +220$$

La ecuación original sería la siguiente:

$$y = mx + b$$
$$y = -0.2x + 220$$

El resultado puede comprobarse en la página 6 de esta unidad.

Problema resuelto

Obtener la pendiente y la ordenada al origen de la forma general $\overset{A}{-2}x \overset{B}{-4}y - \overset{C}{6} = 0$

Respuesta

Obtención de m

$$m = \frac{-A}{B} = \frac{-(-2)}{-4} = -\frac{1}{2}$$

Obtención de b

$$b = \frac{-C}{B} = \frac{-(-6)}{-4} = -\frac{3}{2}$$

La ecuación pendiente y ordenada es: $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

Problema resuelto

Obtener m y b de la forma general $\overset{A}{-0.55}\,x + \overset{B}{\frac{1}{7}}y + \overset{C}{2500} = 0$

Respuesta

Obtención de m

$$m = \frac{-A}{B} = \frac{-(-0.55)}{\frac{1}{7}} = +3.85$$

Obtención de b

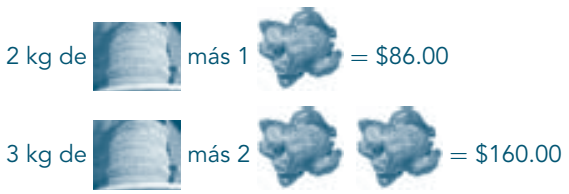
$$b = \frac{-C}{B} = \frac{-(+2500)}{\frac{1}{7}} = -17500$$

La ecuación pendiente y ordenada es: $y = +3.85x - 17\,500$

Además del procedimiento por línea recta para obtener los valores de (x, y), hay otros procedimientos que también dan solución a un problema con dos variables, pero que involucran términos independientes (valores de igualdad), relacionándose las ecuaciones planteadas en un sistema de ecuaciones; para ejemplificar utilizaremos el siguiente ejercicio:

Carmen fue al mercado y en la mañana compró 2 kg de tortillas y 1 pollo, pagó $86.00; llegan visitas de sorpresa, por lo que regresa a comprar 3 kg de tortillas y 2 pollos pagando en esta ocasión $160.00, al llegar a su casa se pregunta cuánto costaba el pollo.

Para dar solución a este tipo de planteamientos puede hacerse lo siguiente:



Debemos identificar cuál se llamará x y cuál y, en esta ocasión llamaremos x al kg de tortillas y al pollo y, integrándose así el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x + 1y = 86 \\ 3x + 2y = 160 \end{cases}$

A continuación se detallan los pasos a seguir para dar solución al sistema de ecuaciones.

1.10 Solución de un sistema de ecuaciones por Suma y Resta o Eliminación

La solución de un sistema de ecuaciones por el método de eliminación, se da al sumar y restar la misma variable.

Los siguientes pasos explican cómo resolver mediante el método de suma y resta, un sistema de ecuaciones con dos variables.

Paso 1: Seleccionar la variable que será eliminada

Primero se tiene que decidir cuál de las dos variables será eliminada, aquí se decide si se elimina la primera o la segunda, lo anterior se realiza para quedarnos con una sola variable.

Paso 2: Eliminación o adecuación

Para eliminar del sistema de ecuaciones a una de las dos variables, se requieren coeficientes numéricos iguales, pero de signos contrarios.

En los sistemas de ecuaciones se pueden presentar dos situaciones:

a) *Eliminación directa*, cuando el sistema de ecuaciones ya presenta en la misma variable, mismo coeficiente numérico y signos diferentes.

b) *Adecuación al sistema*, cuando el sistema de ecuaciones no presente una variable del mismo coeficiente numérico y diferente signo, se tendrá que adecuar.

   Para adecuarla, multiplicamos en forma cruzada los coeficientes numéricos de la variable que se eliminará, y cuando no tenga signos contrarios, a una de las ecuaciones del sistema (la primera o la segunda) la multiplicaremos por un signo negativo.

Paso 3: Valor de la primera variable

Al eliminar en el paso anterior a una de las variables, se tiene una ecuación con una sola variable y al despejarla se obtiene su valor.

Paso 4: Valor de la segunda variable

Al sustituir el valor de la primera variable en cualquiera de las dos ecuaciones originales, se obtiene el valor de la segunda variable.

Paso 5: La comprobación

Los resultados se pueden comprobar al sustituir los valores de las dos variables, en cualquiera de las dos ecuaciones originales.

Problema resuelto

Obtener los valores de las variables del siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x + 1y = 86 \\ 3x + 2y = 160 \end{cases}$.

Respuesta

Aplicando el método de suma y resta o eliminación.

$$\begin{array}{r} 2x + 1y = 86 \\ 3x + 2y = 160 \\ \hline \end{array}$$

Paso 1: Seleccionar la variable que será eliminada; se decidió eliminar de este sistema de ecuaciones a la variable *x*; pero, como el sistema no presenta coeficientes numéricos iguales y signos contrarios, tendrá que adecuarse.

$$\begin{array}{r} (3)[2x + 1y = 86] \\ (2)[3x + 2y = 160] \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6x + 3y = 258 \\ 6x + 4y = 320 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -[6x + 3y = 258] \\ 6x + 4y = 320 \\ \hline \end{array}$$

Paso 2: Eliminación o adecuación; como no hay coeficientes números iguales ni tampoco signos contrarios; adecuaremos el sistema de ecuaciones; multiplicando en forma cruzada los coeficientes de la variable a ser eliminada; por lo tanto, multiplicamos toda la primera ecuación por 3, y toda la segunda ecuación por 2; obteniéndose coeficientes numéricos iguales en la variable *x*.

Como no tenemos signos contrarios, multiplicamos a una de las ecuaciones por un signo negativo, en este caso lo aplicaremos a la primera ecuación.

$$\begin{array}{r} -6x - 3y = -258 \\ 6x + 4y = 320 \\ \hline / \quad 1y = 62 \end{array}$$

Al sumar y restar es como se elimina la variable *x*.

$$y = \frac{62}{1}$$

$$y = 62$$

Paso 3: Valor de la primera variable: $y = 62$

Paso 4: Valor de la segunda variable; se *optó por sustituir el resultado de la variable en la primera ecuación.*

$$\begin{aligned} 2x + 1y &= 86 \\ 2x + 1(62) &= 86 \\ 2x + 62 &= 86 \\ 2x &= 86 - 62 \\ 2x &= 24 \end{aligned}$$

$$x = \frac{24}{2}$$

$$x = 12$$

Paso 5: La comprobación.

$$\begin{aligned} 2x + 1y &= 86 \\ 2(12) + 1(62) &= 86 \\ 24 + 62 &= 86 \\ 86 &= 86 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 160 \\ 3(12) + 2(62) &= 160 \\ 36 + 124 &= 160 \\ 160 &= 160 \end{aligned}$$

El kilogramo de tortillas cuesta $12.00

Cada pollo tiene un costo de $62.00

Alerta

Para aplicar el método de Suma y Resta es necesario tener Coeficientes Numéricos iguales pero de signos contrarios.

1.11 Solución de un sistema de ecuaciones por Método de Igualación

La solución de un sistema de ecuaciones por el método de igualación, se presenta al igualar los despejes de la variable que se desea eliminar.

Los siguientes pasos explican cómo resolver mediante el método de igualación, un sistema de ecuaciones con dos variables.

Paso 1: Seleccionar la variable a ser despejada del sistema de ecuaciones

De ambas ecuaciones, se escoge la variable a despejarse.

Paso 2: Despejar la variable seleccionada

Del sistema de ecuaciones se despeja en ambas a la misma variable, con el fin de dejarla sola y poder realizar el proceso de igualación.

Para resolver el sistema de ecuaciones se puede optar por cualquiera de las siguientes situaciones:

a) Si optamos por despejar del sistema de ecuaciones la *primera variable*, en ambas ecuaciones se debe realizar ese despeje; para que al igualar los dos despejes se elimine a una de las variables.

b) Si optamos por despejar del sistema de ecuaciones la *segunda variable*, en ambas ecuaciones se debe realizar ese despeje; para que al igualar los dos despejes se elimine a una de las variables.

Paso 3: Valor de la primera variable

Al eliminar en el paso anterior a una de las variables, se tiene una ecuación con una sola variable y al despejarla se obtiene su valor.

Paso 4: Valor de la segunda variable

Al sustituir el valor de la primera variable en cualquiera de las dos ecuaciones originales, se obtiene el valor de la segunda variable.

Paso 5: La comprobación

Los resultados se pueden comprobar al sustituir los valores de las dos variables, en cualquiera de las dos ecuaciones originales.

Problema resuelto

Obtener los valores de las variables del siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x + 1y = 86 \\ 3x + 2y = 160 \end{cases}$.

Respuesta

Aplicando el método de igualación.

$$\begin{array}{r} 2x + 1y = 86 \\ 3x + 2y = 160 \\ \hline \end{array}$$

Paso 1: Seleccionar la variable a ser despejada del sistema de ecuaciones; *x es la variable que decidimos despejar del sistema de ecuaciones.*

Respuesta (*continuación*)

Paso 2: Despejar la variable seleccionada; despejaremos x en ambas ecuaciones, para poder igualar sus despejes.

$$2x + 1y = 86$$
$$2x = 86 - 1y$$
$$x = \frac{86 - 1y}{2}$$
$$x = \frac{86}{2} - \frac{1}{2}y$$

$$3x + 2y = 160$$
$$3x = 160 - 2y$$
$$x = \frac{160 - 2y}{3}$$
$$x = \frac{160}{3} - \frac{2}{3}y$$

De igualar ambos despejes, es como se logra eliminar una variable; en este caso x

$$x = x$$
$$\frac{86}{2} - \frac{1}{2}y = \frac{160}{3} - \frac{2}{3}y$$
$$-\frac{1}{2}y + \frac{2}{3}y = \frac{160}{3} - \frac{86}{2}$$
$$\frac{1}{6}y = \frac{31}{3}$$
$$y = \frac{\frac{31}{3}}{\frac{1}{6}}$$
$$y = 62$$

Paso 3: Valor de la primera variable.

Paso 4: Valor de la segunda variable; *se obtiene al sustituir el resultado en la segunda ecuación.*

$$3x + 2y = 160$$
$$3x + 2(62) = 160$$
$$3x + 124 = 160$$
$$3x = 160 - 124$$
$$3x = 36$$
$$x = \frac{36}{3}$$
$$x = 12$$

Paso 5: La comprobación.

$$2x + 1y = 86$$
$$2(12) + 1(62) = 86$$
$$24 + 62 = 86$$
$$86 = 86$$

$$3x + 2y = 160$$
$$3(12) + 2(62) = 160$$
$$36 + 124 = 160$$
$$160 = 160$$

Alerta

Para aplicar el método de Igualación se realizan los despejes de ambas ecuaciones y se igualan.

1.12 Solución de un sistema de ecuaciones por Método de Sustitución

La solución de un sistema de ecuaciones por el método de sustitución se da al despejar una variable de una ecuación sustituyendo ese despeje en la otra ecuación.

Los siguientes pasos explican cómo resolver mediante el método de sustitución, un sistema de ecuaciones con dos variables.

Paso 1: Seleccionar la ecuación y la variable a despejarse

Se escoge la ecuación de la que despejaremos la variable: puede despejarse la primera o la segunda, el despeje es diferente, pero el resultado será el mismo.

Paso 2: El despeje de la variable y su sustitución

En este paso se despeja la variable deseada de una de las ecuaciones, para después sustituir los valores del despeje en la otra ecuación. Al despejar se pueden presentar cuatro opciones:

a) Puede despejarse la primera variable de la primera ecuación, para sustituirse en la segunda ecuación; logrando así, una ecuación de primer grado con una sola variable.

b) Se puede despejar la segunda variable de la primera ecuación y sustituirse en la segunda ecuación; quedando una ecuación de primer grado con una variable.

c) La primera variable de la segunda ecuación se puede despejar, para sustituirse en la primera ecuación.

d) La última opción es despejar la segunda variable de la segunda ecuación, para que se sustituya en la primera ecuación.

Paso 3: Valor de la primera variable

Al eliminar en el paso anterior a una de las variables, se tiene una ecuación con una sola variable y al despejarla se obtiene su valor.

Paso 4: Valor de la segunda variable

Al sustituir el valor de la primera variable en cualquiera de las dos ecuaciones originales, se obtiene el valor de la segunda variable.

Paso 5: La comprobación

Los resultados se pueden comprobar al sustituir los valores de las dos variables, en cualquiera de las dos ecuaciones originales.

Problema resuelto

Obtener los valores de las variables del siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x + 1y = 86 \\ 3x + 2y = 160 \end{cases}$.

Respuesta

Aplicando el método de sustitución.

$$\begin{array}{r} 2x + 1y = 86 \\ 3x + 2y = 160 \\ \hline \end{array}$$

Paso 1: Seleccionar la ecuación y la variable a despejarse; aquí decidimos que despejaremos ***y*** de la primera ecuación; aplicando la segunda opción (inciso *b*).

$$2x + 1y = 86$$
$$1y = 86 - 2x$$
$$y = \frac{86 - 2x}{1}$$
$$y = \frac{86}{1} - \frac{2}{1}x$$

Paso 2: El despeje de la variable y su sustitución; despejamos la segunda variable ***y*** de la segunda ecuación; para después sustituirla en la primera ecuación.

Alerta

Para aplicar el método de Sustitución se despeja a una de las ecuaciones y se sustituye en la otra.

Respuesta (*continuación*)

Paso 3: Valor de la primera variable; *al sustituir el despeje realizado en la primera ecuación, se obtiene el valor de la primera variable.*

$$3x + 2y = 160$$
$$3x + 2\left[\frac{86}{1} - \frac{2}{1}x\right] = 160$$
$$3x + 172 - 4x = 160$$
$$3x - 4x = 160 - 172$$
$$-1x = -12$$
$$x = \frac{-12}{-1}$$
$$x = 12 \quad \text{Valor de la primera variable}$$

Paso 4: Valor de la segunda variable; *se obtiene al sustituir el resultado en la segunda ecuación.*

$$3x + 2y = 160$$
$$3(12) + 2y = 160$$
$$36 + 2y = 160$$
$$2y = 160 - 36$$
$$2y = 124$$
$$y = \frac{124}{2}$$
$$y = 62$$

Paso 5: La comprobación.

$$2x + 1y = 86$$
$$2(12) + 1(62) = 86$$
$$24 + 62 = 86$$
$$86 = 86$$

$$3x + 2y = 160$$
$$3(12) + 2(62) = 160$$
$$36 + 124 = 160$$
$$160 = 160$$

1.13 Solución de un sistema de ecuaciones por Método de Determinantes

Con este método no se elimina ninguna variable, pues se necesitan ambas, para crear tres determinantes; esto es, tres arreglos numéricos colocados en filas y columnas, en donde el tamaño de este, dependerá del número de ecuaciones que el sistema presente.

Los siguientes pasos explican cómo resolver mediante el método de determinantes, un sistema de ecuaciones con dos variables.

Paso 1: Integración del determinante del sistema

El primer determinante es llamado Delta del Sistema (Δs), formado con los valores principales del problema; tanto de x como de y, en una representación en filas y columnas.

Paso 2: Integración del segundo determinante

El segundo determinante recibe el nombre de Delta x (Δx), este se forma para la variable x, al desconocer los valores de la variable y sustituirlos por los valores de la igualdad, en tanto que, la variable y conserva sus valores originalmente planteados.

Paso 3: Integración del tercer determinante

El tercer determinante es representado como Delta y (Δy), para la variable y, se integra al desconocer los valores de la variable y sustituirlos por los valores de la igualdad, teniendo presente que la variable x, conserva sus valores originalmente planteados.

Paso 4: Resolución de los tres determinantes formados

Después de integrar los tres determinantes, se busca la solución de cada uno, para hacerlo se multiplican en forma cruzada los valores del determinante; para luego restarlos.

Paso 5: Obtención del valor de las variables

El valor de la variable *x*, resulta de dividir el valor de Delta *x* entre Delta *s* y el valor de la variable *y*, se obtiene al dividir el valor de Delta *y* entre Delta *s*.

Paso 6: La comprobación

Los resultados se pueden comprobar al sustituir los valores de las dos variables, en cualquiera de las dos ecuaciones originales.

Problema resuelto

Obtener los valores de las variables del siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x + 1y = 86 \\ 3x + 2y = 160 \end{cases}$.

Respuesta

Aplicando el método de determinantes.

Primer determinante $\Delta s = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$

Paso 1: Integración del determinante del sistema; los valores principales del problema.

Segundo determinante $\Delta x = \begin{vmatrix} 86 & 1 \\ 160 & 2 \end{vmatrix}$

Paso 2: Integración del segundo determinante; aquí los valores de la igualdad se colocan en lugar de los de ***x***, con los originales en ***y***.

Tercer determinante $\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 86 \\ 3 & 160 \end{vmatrix}$

Paso 3: Integración del tercer determinante; aquí los valores de la igualdad se colocan en lugar de los de ***y***, con los originales en ***x***.

Paso 4: Resolución de los tres determinantes formados; aquí se multiplica en forma cruzada y luego se resta.

Primer determinante $\Delta s = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = [2(2)] - [3(1)] = 4 - 3 = 1$

Segundo determinante $\Delta x = \begin{vmatrix} 86 & 1 \\ 160 & 2 \end{vmatrix} = [86(2)] - [160(1)] = 172 - 160 = 12$

Tercer determinante $\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 86 \\ 3 & 160 \end{vmatrix} = [2(160)] - [3(86)] = 320 - 258 = 62$

Paso 5: Obtención del valor de las variables.

Valor de la variable *x*

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta s} = \frac{12}{1} = 12$$

Valor de la variable *y*

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta s} = \frac{62}{1} = 62$$

Paso 6: La comprobación.

$$\begin{aligned} 2x + 1y &= 86 \\ 2(12) + 1(62) &= 86 \\ 24 + 62 &= 86 \\ 86 &= 86 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 160 \\ 3(12) + 2(62) &= 160 \\ 36 + 124 &= 160 \\ 160 &= 160 \end{aligned}$$

Alerta

Tener cuidado y no olvidar tomar en cuenta los signos al integrar cada uno de los determinantes.

Alerta

Para aplicar el método por Determinantes se multiplica cruzado y después se resta.

1.14 Solución de un sistema de ecuaciones por el Método gráfico

En la solución de un sistema de ecuaciones por el método gráfico, no se elimina ninguna variable; porque se trabajan juntas y su solución se presenta gráficamente, de allí su nombre.

Los siguientes pasos explican cómo resolver mediante el método gráfico, un sistema de ecuaciones con dos variables.

Paso 1: En la primera ecuación asignamos valor de cero a la variable x

El proceso de evaluación consiste en dar el valor de cero a una de las variables, para que la otra variable, por sí sola arroje su valor; después se relacionan en un punto de coordenada (*x*, *y*), donde una no tendrá valor (su valor es cero) y la otra valdrá lo que se obtenga del despeje.

Paso 2: En la primera ecuación asignamos valor de cero a la variable y

Se repite el paso anterior, pero ahora para la variable *y*, es decir, *y* valdrá cero, para obtener el valor de *x*.

Paso 3: Repetir los dos pasos anteriores pero con la otra ecuación

Los dos pasos anteriores se hacen con cada una de las ecuaciones del sistema de ecuaciones.

Alerta

Dado que son dos las ecuaciones. Dos serán las rectas que se formen.

Paso 4: Presentación de los cuatro puntos de coordenada

Los cuatro puntos de coordenada obtenidos, se utilizan para graficarse, en donde los dos primeros integraran la primera recta y los otros dos la segunda.

Paso 5: Solución gráfica de las variables

Cuando las líneas rectas se encuentren trazadas en el punto donde se cruzan, se indicará la solución de las variables. Para ello, obsérvese el gráfico y vea el valor indicado en la variable *x*, después el valor que se indica para la variable *y*.

Los valores indicados, tanto para las *x* (abscisas) como *y* (ordenadas), serán los resultados de las variables.

Problema resuelto

Obtener los valores de las variables del siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x + 1y = 86 \\ 3x + 2y = 160 \end{cases}$.

Respuesta

Aplicando el método gráfico.

Primera ecuación:

Paso 1: Asignamos valor de cero a ***x***

$$\begin{aligned} 2x + 1y &= 86 \\ 2(0) + 1y &= 86 \\ +1y &= 86 \\ y &= \frac{86}{1} \\ y &= 86 \qquad (0, 86) \end{aligned}$$

Paso 2: Asignamos valor de cero a ***y***

$$\begin{aligned} 2x + 1y &= 86 \\ 2x + 1(0) &= 86 \\ +2x &= 86 \\ x &= \frac{86}{2} \\ x &= 43 \qquad (43, 0) \end{aligned}$$

Alerta

De asignar valor a cero a una de las variables y obtener el valor de la otra es como se integra el punto coordenado a graficarse.

Respuesta (*continuación*)

Paso 3: Repetir los pasos anteriores.

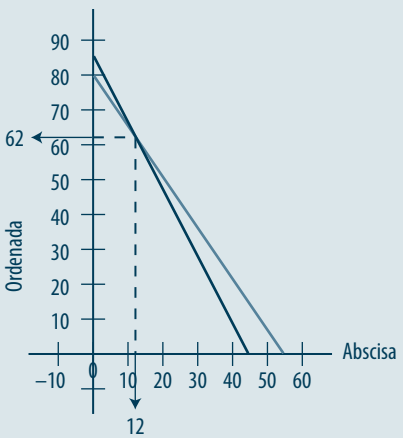
Segunda ecuación:

$$3x + 2y = 160 \qquad 3x + 2y = 160$$
$$3(0) + 2y = 160 \qquad 3x + 2(0) = 160$$
$$+ 2y = 160 \qquad +3x = 160$$
$$y = \frac{160}{2} \qquad x = \frac{160}{3}$$
$$y = 80 \quad (0, 80) \qquad x = 53.33 \quad (53.33, 0)$$

Paso 4: Presentación de los cuatro puntos de coordenada.

x, *y*	
(0, 86)	Puntos de la primera recta
(43, 0)	

x, *y*	
(0, 80)	Puntos de la segunda recta
(53.33, 0)	



Paso 5: Solución gráfica de las variables.

Donde las líneas rectas se cruzan, se indicarán las soluciones de las variables.

Las rectas se cruzan en $x = 12$ la abscisa y en $y = 62$ la ordenada.

En algunas situaciones se pueden presentar tres actividades específicas, por lo tanto, el problema no será de dos variables sino de tres.

Será un problema con tres ecuaciones y cada ecuación tendrá tres variables igualada cada una a un término independiente y en conjunto integrarán un sistema de ecuaciones de tres variables.

Un ejemplo de tres variables sería el siguiente:

Un comerciante realizó sus compras de temporada; compró lápices, plumas y cuadernos. El primer día adquirió cuatro cajas de lápices, tres cajas de plumas y dos cuadernos, pagó $350.00. El segundo día compró una caja de lápices, seis cajas de plumas y seis cuadernos, de eso fue $500.00. Y el tercer día compró tres cajas de lápices, cinco cajas de plumas y dos cuadernos, pagó $450.00. ¿Cuánto costó cada uno de los artículos comprados?

4 cajas de más 3 cajas de más 2 = $350.00

1 caja de más 6 cajas de más 6 = $500.00

3 cajas de más 5 cajas de más 2 = $450.00

Tal y como se hizo antes identificaremos cuál será la primera variable, cuál la segunda y ahora también cuál la tercera, por lo que para este sistema de ecuaciones tipificaremos x como cajas de lápices, y cajas de plumas y w los cuadernos; integrándose el siguiente sistema de ecuaciones con tres variables.

$$\begin{cases} 4x + 3y + 2w = 350 \\ x + 6y + 6w = 500 \\ 3x + 5y + 2w = 450 \end{cases}$$

Solo que para utilizar el método de suma y resta o eliminación con tres variables, el sistema presentará una importante adecuación.

La *adecuación* es que para resolver un sistema de tres ecuaciones, lo primero es dividirlo en dos sistemas aplicándose después lo visto para su eliminación.

Alerta

La razón de dividirlo es simple; una variable no puede eliminarse si está presente tres veces, ya que se tendrían dos signos positivos y uno negativo o viceversa.

1.15 Solución de un sistema de tres ecuaciones por el Método de Eliminación

Como recordaras, en este método, para eliminar la variable se suma y resta a la vez.

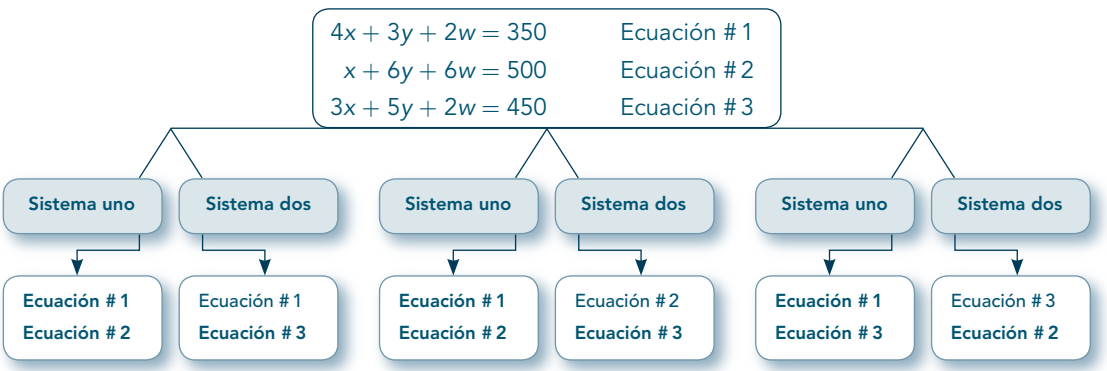
Los siguientes pasos explican cómo resolver mediante el método de suma y resta, un sistema de ecuaciones con tres variables. Recordar que las tres variables deben ser diferentes.

Paso 1: Dividir el sistema de tres ecuaciones en dos sistemas

El sistema de tres ecuaciones debe dividirse en dos sistemas de dos ecuaciones cada uno, pero con tres variables.

Alerta

Un sistema que presenta tres ecuaciones debe dividirse en dos sistemas, relacionando en su integración a las tres ecuaciones, repitiéndose cualquiera de ellas.



Paso 2: Seleccionar la variable que será eliminada en ambos sistemas de ecuaciones

Debe de elegirse a una de las tres variables, para eliminarla de ambos sistemas (sistema uno, sistema dos); los sistemas de dos ecuaciones pero de tres variables.

Paso 3: Eliminación o adecuación

Para eliminar del sistema de ecuaciones a la variable seleccionada, se requiere que esta tenga coeficientes numéricos iguales y signos contrarios, pudiéndose presentar lo siguiente:

Alerta

Al eliminar la variable seleccionada de ambos sistemas de ecuaciones, es como se integra el nuevo sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

a) *Eliminación directa*, cuando el sistema de ecuaciones presente para la misma variable el mismo coeficiente numérico y diferente signo.

b) *Adecuación al sistema*, cuando el sistema de ecuaciones no presente una variable del mismo coeficiente numérico y diferente signo, se tendrá que adecuar.

Para adecuarla, multiplicamos en forma cruzada los coeficientes numéricos de la variable a eliminarse y solo en caso de no tener signos contrarios, a la primera o la segunda ecuación la multiplicaremos por un signo negativo.

Paso 4: Integración del nuevo sistema

De las ecuaciones resultantes es como se forma el nuevo sistema de dos ecuaciones.

Paso 5: La resolución del nuevo sistema de ecuaciones; valor de la primera variable

Al dar solución al sistema de ecuaciones *se obtiene el valor de la primera variable.*

Paso 6: La sustitución del valor obtenido; valor de la segunda variable

Al sustituir el valor de la primera variable en cualquiera de las ecuaciones del sistema *se obtiene el valor de la segunda variable.*

Paso 7: Valor de la tercera variable; la sustitución en cualquier ecuación original

Al sustituir los dos valores obtenidos en cualquiera de las tres ecuaciones originales, *se obtiene el valor de la tercera incógnita.*

Paso 8: La comprobación

Sustituimos los tres resultados en cualquiera de las tres ecuaciones originales.

Respuesta

Aplicando el método de suma y resta para un problema con tres variables.

$$4x + 3y + 2w = 350 \quad \text{Ecuación 1}$$
$$x + 6y + 6w = 500 \quad \text{Ecuación 2}$$
$$3x + 5y + 2w = 450 \quad \text{Ecuación 3}$$

Paso 1: Dividir el sistema de tres ecuaciones en dos sistemas.

$$\begin{array}{r} 4x + 3y + 2w = 350 \\ x + 6y + 6w = 500 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (6)[4x + 3y + 2w = 350] \\ (2)[x + 6y + 6w = 500] \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24x + 18y + 12w = 2100 \\ 2x + 12y + 12w = 1000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24x + 18y + 12w = 2100 \\ -[2x + 12y + 12w = 1000] \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24x + 18y + 12w = +2100 \\ -2x - 12y - 12w = -1000 \end{array}$$

$$22x + 6y \quad / \quad = 1100$$

Paso 2: Seleccionar la variable que será eliminada en ambos sistemas de ecuaciones; *se eliminará la variable* **w**.

Paso 3: Eliminación o adecuación; en este caso **w** debe adecuarse. Como la variable en el primer sistema no presenta coeficientes numéricos iguales y signos contrarios deben obtenerse, como el otro sistema presenta coeficientes numéricos iguales solo multiplicaremos por un signo negativo; *recuerda es indiferente la ecuación multiplicada.*

Paso 4: Integración del nuevo sistema.

$$\begin{array}{r} 4x + 3y + 2w = 350 \\ 3x + 5y + 2w = 450 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -[4x + 3y + 2w = 350] \\ [3x + 5y + 2w = 450] \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -4x - 3y - 2w = -350 \\ 3x + 5y + 2w = +450 \end{array}$$

$$-x + 2y \quad / \quad = 100$$

$$\begin{array}{r} 22x + 6y \quad / \quad = 1100 \\ -x + 2y \quad / \quad = 100 \end{array}$$

Paso 5: La resolución del nuevo sistema de ecuaciones; recordarás que lo primero que se hacía era seleccionar la variable a ser eliminada; decidimos eliminar ***x***, solo que como no hay coeficientes numéricos iguales adecuaremos.

$$\begin{array}{rl} 1[22x + 6y = & 1100] \\ 22[-x + 2y = & 100] \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 22x + 6y = & 1100 \\ -22x + 44y = & 2200 \\ \hline / + 50y = & 3300 \end{array}$$

$$y = \frac{3300}{50}$$

$y = 66$ Valor de la primera variable.

Paso 6: La sustitución del valor obtenido; valor de la segunda variable.

$$-x + 2y = 100$$
$$-x + 2(66) = 100$$
$$-x + 132 = 100$$
$$-x = 100 - 132$$
$$-x = -32$$
$$x = \frac{-32}{-1}$$
$$x = +32$$

Paso 7: Valor de la tercera variable; la sustitución en cualquier ecuación original.

$$x + 6y + 6w = 500$$
$$(32) + 6(66) + 6w = 500$$
$$32 + 396 + 6w = 500$$
$$6w = 500 - 32 - 396$$
$$6w = +72$$
$$w = \frac{+72}{+6}$$
$$w = 12$$

Paso 8: La comprobación; se sustituyen los valores en cualquiera de las tres ecuaciones originales.

$$4x + 3y + 2w = 350$$
$$4(32) + 3(66) + 2(12) = 350$$
$$128 + 198 + 24 = 350$$
$$350 = 350$$

Los artículos adquiridos tienen un precio de:

= $32.00

= $66.00

= $12.00

1.16 Aplicaciones lineales

Una de las características de las matemáticas es su aplicación en distintos ámbitos, en el área administrativa, por ejemplo, se analizan ingresos, costos, utilidades y gastos en los que se requieren conocimientos matemáticos. Por ello, se presentan en esta sección las distintas aplicaciones de las matemáticas económicas.

La función económico–administrativa está representada por la relación de un conjunto de indicadores económicos que le sirven a la empresa para conocer su situación económico financiera, en la que se consideran términos como: I (ingreso), C_v (costo variable), C_f (costo fijo), C_t (costo total), U (utilidad), *P.E.* (punto de equilibrio), entre otros.

Entre los más importantes ubicaremos el Ingreso, el Costo, la Utilidad y el P.E.

Ingreso

Un ingreso es representado por una cantidad que se acumula en determinado tiempo.

La función de ingreso se obtiene al representar $\boldsymbol{I = P(q)}$.

Donde $\boldsymbol{P}$ es el precio de un artículo y $\boldsymbol{(q)}$ las unidades vendidas a ese precio.

Costo

Un costo es la cantidad que se invierte al producir un bien.

Una función de costo total se representa por la integración del costo fijo más el costo variable es decir:

$$\boldsymbol{C_t = C_f + C_v}$$

$\boldsymbol{C_f}$ es costo fijo; este se cobra aunque no haya producción, su importe es total.

$\boldsymbol{C_v}$ es el costo que fluctúa en relación a unidades producidas, siempre es unitario.

Utilidad

Una utilidad se obtiene de la diferencia entre el ingreso obtenido y el costo del bien.

La fórmula de utilidad es:

$$\boldsymbol{U = I - C}$$

La utilidad de algo es lo que se obtenga menos lo que costó.

Otro elemento que las empresas toman en consideración es el punto de equilibrio (P.E.) que es el punto integrado por la relación de las (unidades, con su Ingreso), un punto de equilibrio se logra cuando no hay ni pérdidas ni utilidades, es el punto donde por lógica no hay utilidad, entonces vale cero, ya que nos referimos al equilibrio.

Para dar solución se recomienda seguir los siguientes pasos:

Paso 1: Identificar los datos del problema

En la redacción de un problema podemos identificar cualesquiera de los siguientes elementos I (ingreso), C_v (costo variable), C_f (costo fijo), C_t (costo total), U (utilidad), P (precio de venta), q (número de unidades), *P.E.* (punto de equilibrio), datos que sirven de base para la solución de un problema en especifico, por ello identificarlo es lo primero.

Paso 2: Selección o despeje de la fórmula

Dependiendo de lo solicitado en el problema se sabrá cual será la fórmula a utilizar:

Fórmula de la obtención del ingreso $I = P(q)$

Ingreso es igual a $\boldsymbol{P}$ precio por número de unidades $\boldsymbol{q}$

Fórmula de la obtención del costo $C_t = C_f + C_v(q)$

Costo total es igual a la relación del Costo Fijo $\boldsymbol{C_f}$ más el Costo Variable en relación a las unidades $\boldsymbol{C_v(q)}$

Alerta

En las aplicaciones lineales las unidades se representan con la letra q o x.

Fórmula de la obtención de la utilidad $U = I - C_t$

Utilidad es igual a la diferencia entre el Ingreso I y el Costo total C_t

Fórmula de la obtención de las Unidades $x = \dfrac{U + C_f}{P - C_v}$

Y al despejarse se obtienen todas las demás variables

Fórmula para la obtención de la Utilidad U

$$x(P - C_v) - C_f = U$$

Fórmula para la obtención del Precio P

$$P = \frac{U + C_f}{x} + C_V$$

$$x = \frac{U + C_f}{P - C_v}$$

Fórmula para la obtención de los Costos Fijos C_f

$$x(P - C_v) - U = C_f$$

Fórmula para la obtención del Costo Variable C_v

$$-C_v = \frac{U + C_f}{x} - P$$

Paso 3: Sustituir los datos y obtener el resultado

Al ubicar el elemento que deseamos conocer, identificaremos la fórmula apropiada, se sustituyen los datos y se resuelve el ejercicio.

Problema resuelto

Un empresario vende zapatos a $350.00 cada par, si en el mes vendió 100 pares, ¿cuánto es el ingreso del mes?

Respuesta

Paso 1: Identificación de datos

$P \rightarrow 350.00$

$q \rightarrow 100$

$I = ?$

Paso 2: Selección de la fórmula

$I = Pq$

Como deseo obtener el ingreso utilizo la fórmula del ingreso, no puedo utilizar la de costos o utilidad porque desconozco esos datos.

Paso 3: Sustitución y resultado

$I = P(q)$

$I = 350(100)$

$\mathbf{I = 35\,000}$

Problema resuelto

Un empresario necesita conocer su costo mensual al fabricar zapatos, para lo cual considera los siguientes costos: en la renta del local $2 000.00, en sueldos a sus empleados $1 200.00, en grasa para zapatos $10.00, par de suelas para zapatos $95.00, en un bote de pegamento $65.00. Integrar la ecuación de costos y obtener el costo de producir 100 zapatos.

Respuesta

Paso 1: Identificación de datos

Renta del local → 2 000.00 → C_f

Sueldos → 1 200.00 → C_f

Grasa → 10.00 → C_v

Suelas → 95.00 → C_v

Pegamento → 65.00 → C_v

Unidades a producir 100 → x

Tanto la renta del local como los sueldos son costos fijos, porque sin importar si hay o no producción o venta deben pagarse, los otros costos son variables por tener relación directa con la producción.

Paso 2: Selección de la fórmula

$$C_t = C_f + C_v(x)$$

Paso 3: Sustitución y resultado

$$C_t = C_f + C_v(x)$$

$$\begin{aligned} C_t &= 2\,000 + 10 \\ &\quad 1200 + 95 \\ &\quad + 65 \\ C_t &= 3\,200 + 170(100) \end{aligned}$$

$$C_t = 3\,200 + 17\,000$$

$$\boldsymbol{C_t = 20\,200}$$

Problema resuelto

Utilizando los dos ejercicios anteriores obtendremos la utilidad de nuestro empresario zapatero.

Respuesta

En el problema de ingreso indica que la venta del mes fue de 100 pares a $350.00, por lo tanto su ecuación de ingresos es

$$I = Px$$

$$I = 350(x)$$

En el problema de costos se indica que la producción de zapatos se representa por la siguiente ecuación

$$C_t = C_f + C_v(x)$$

$$C_t = 3\,200 + 170(x)$$

Al relacionar ambas se obtiene la ecuación de utilidad.

Paso 1: Identificación de datos

$$I = 350(x)$$

$$C_t = 3\,200 + 170(x)$$

Paso 2: Selección de la fórmula

$$U = I - C_t$$

Paso 3: Sustitución y resultado

$$U = I - C_t$$

$$U = 350(x) - [3\,200 + 170(x)]$$

$$U = 350(x) - 3\,200 - 170(x)$$

$$U = 180(x) - 3\,200$$

$$U = 180(100) - 3\,200$$

$$\boldsymbol{U = \$14\,800.00}$$

Problema resuelto

Determinar la producción de una compañía que vende en $200.00 una refacción automotriz, si al producirla presenta costos fijos por $5 932 000.00, costos variables unitarios por $66.00, con lo cual se pretende una utilidad de $500 000.00.

Respuesta

Paso 1: Identificación de datos

$C_f = 5\,932\,000.00$
$C_v = 66.00$
$P = 200.00$
$U = 500\,000.00$
$x = ?$

Paso 2: Selección de la fórmula

$$x = \frac{U + C_f}{P - C_v}$$

Como deseo obtener x las unidades del problema se emplea esta fórmula porque es la única que te permite obtener esa incógnita, las otras son para costo, ingreso y utilidad

Paso 3: Sustitución y resultado

$$x = \frac{500000 + 5932000}{200 - 66}$$

$$x = \frac{6432000.00}{134}$$

$$\boldsymbol{x = 48\,000 \text{ unidades}}$$

Problema resuelto

Un comercio tiene costos fijos de $910.00, precio de venta de $100.00, un costo variable por cada 5 piezas de $300.00 y una utilidad diaria de $250.00. Obtener las unidades.

Respuesta

Paso 1: Identificación de datos

$U = 250.00$
$C_f = 910.00$
$P = 100.00$
$C_v = 300.00 / 5 = 60.00$
$x = ?$

Paso 2: Selección de la fórmula

$$\boldsymbol{x} = \frac{U + C_f}{P - C_v}$$

Paso 3: Sustitución y resultado

$$x = \frac{250 + 910}{100 - 60}$$

$$\boldsymbol{x = 29 \text{ unidades}}$$

Problema resuelto

Un fabricante de artículos electrónicos vende un producto en $75.00, el departamento de contabilidad reporta que los costos fijos son de $5 440.00 y los costos variables de $35.00 por producto fabricado, ¿cuál será la utilidad, si se producen 161 unidades?

Respuesta

Paso 1: Identificación de datos

$P = 75.00$
$C_f = 5\,440.00$
$C_v = 35.00$
$x = 161$ unidades
$U = ?$

Paso 2: Selección de la fórmula

$$x = \frac{\boldsymbol{U} + C_f}{P - C_v}$$

$$x(P - C_v) = \boldsymbol{U} + C_f$$

$$x(P - C_v) - C_f = \boldsymbol{U}$$

Paso 3: Sustitución y resultado

$$161(75 - 35) - 5\,440 = U$$
$$161(40) - 5\,440 = U$$
$$6\,440 - 5\,440 = U$$
$$\boldsymbol{1\,000 = U}$$

Problema resuelto

En una industria se fabrican 15 000 unidades, los costos variables representan $220.00 por unidad y cada una se vende en $300.00, lo que arroja una utilidad de $500 000.00. Determinar cuál es el importe del costo fijo.

Respuesta

Paso 1: Identificación de datos

$U = 500\,000.00$
$P = 300.00$
$C_v = 220.00$
$x = 15\,000$
$C_f = ?$

Paso 2: Selección de la fórmula

$$x = \frac{U + \boldsymbol{C_f}}{P - C_v}$$

$$x(P - C_v) = U + \boldsymbol{C_f}$$

$$x(P - C_v) - U = \boldsymbol{C_f}$$

Paso 3: Sustitución y resultado

$15\,000\,(300 - 220) - 500\,000 = C_f$
$15\,000\,(80) - 500\,000 = C_f$
$1\,200\,000 - 500\,000 = C_f$
$\boldsymbol{700\,000 = C_f}$

Problema resuelto

Al vender 1 000 celulares su costo variable unitario es de $560.00 y fijo por $900 000.00, si se obtiene una utilidad de $540 000.00, ¿cuál es el precio del celular?

Respuesta

Paso 1: Identificación de datos

$U = 540\,000.00$
$C_f = 900\,000.00$
$C_v = 560.00$
$x = 1\,000$
$P = ?$

Paso 2: Selección de la fórmula

$$x = \frac{U + C_f}{\boldsymbol{P} - C_v}$$

$$x(\boldsymbol{P} - C_v) = U + C_f$$

$$\boldsymbol{P} - C_v = \frac{U + C_f}{x}$$

$$\boldsymbol{P} = \frac{U + C_f}{x} + C_v$$

Paso 3: Sustitución y resultado

$$P = \frac{540\,000 + 900\,000}{1000} + 560$$

$$P = \frac{1440\,000}{1000} + 560$$

$$P = 1\,440 + 560$$

$$\boldsymbol{P = 2\,000}$$

Problema resuelto

Obtener el importe del costo variable unitario de un producto, si al producir 500 piezas y vender cada una en $300.00, obtiene una utilidad de $55 000.00, siempre y cuando el importe de sus costos fijos sea de $55 000.00.

Respuesta

Paso 1: Identificación de datos

$x = 500$
$P = 300.00$
$U = 55\,000.00$
$C_f = 55\,000.00$
$C_v = ?$

Paso 2: Selección de la fórmula

$$x = \frac{U + C}{P - \boldsymbol{C_v}}$$

$$x(P - \boldsymbol{C_v}) = U + C_f$$

$$P - \boldsymbol{C_v} = \frac{U + C_f}{x}$$

$$-\boldsymbol{C_v} = \frac{U + C_f}{x} - P$$

Paso 3: Sustitución y resultado

$$-C_v = \frac{55000 + 55000}{500} - 300$$

$$-C_v = \frac{110000}{500} - 300$$

$$-C_v = 220 - 300$$

$$-C_v = -80$$

$$\boldsymbol{C_v = \frac{-80}{-1} = +80}$$

Problema resuelto

Un empresario reporta $36 000.00 de ingresos por la venta de un producto de novedad, su contador le informa que para no ganar pero tampoco perder debe elaborar 40 piezas, con ello cubre los siguientes costos $C_t = 16\,000.00 + 500(x)$. Comprueba si la información proporcionada por el contador es correcta o incorrecta.

Respuesta

Paso 1: Identificación de datos

$C_f = 16\,000.00$
$C_v = 500.00$
$x = 40$ piezas
$P = ?$
$U = ?$

Paso 2: Selección de la fórmula

El problema supuestamente presenta dos incógnitas, pero por la redacción ambas pueden deducirse

Si el ingreso es de $ 36 000 y se producen 40 piezas al dividir

$$\frac{\text{Ingreso}}{\text{piezas}} = \text{Precio de venta}$$

Paso 3: Sustitución y resultado

$x(P - C_v) - C_f = \boldsymbol{U}$
$40(900 - 500) - 16\,000 = U$
$40(400) - 16\,000 = U$
$16\,000 - 16\,000 = U$
$0 = U$

Efectivamente para no ganar ni perder deben producirse 40 piezas.

Produciendo 39 unidades; una unidad menos

$x(P - C_v) - C_f = \boldsymbol{U}$
$39(900 - 500) - 16\,000 = U$
$39(400) - 16\,000 = U$
$15\,600 - 16\,000 = U$
$-400 = U$

Obtención de la pérdida

Produciendo 41 unidades; una unidad más

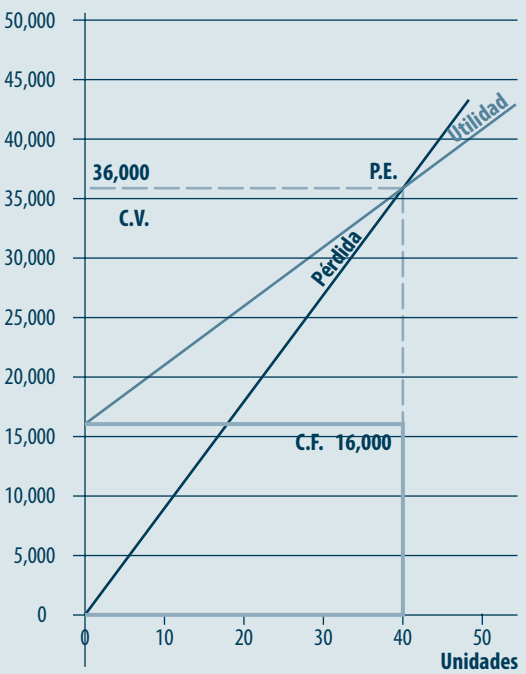
$x(P - C_v) - C_f = \boldsymbol{U}$
$41(900 - 500) - 16\,000 = U$
$41(400) - 16\,000 = U$
$16\,400 - 16\,000 = U$
$+400 = U$

Obtención de la utilidad

Produciendo 40 unidades

$x(P - C_v) - C_f = \boldsymbol{U}$
$40(900 - 500) - 16\,000 = U$
$40(400) - 16\,000 = U$
$16\,000 - 16\,000 = U$
$0 = U$

Obtención del P.E.



Alerta

Punto de Equilibrio (P.E.) se le conoce al punto donde no hay ni utilidad ni pérdida.

Problema resuelto

Al vender celulares se presentan costos variables por $560.00 y fijos por $900 000.00, si cada celular se vende en $2 000.00, determina el punto de producción para que la empresa no gane pero tampoco pierda.

Respuesta

Paso 1: Identificación de datos

$U = 0.00$
$C_f = 900\,000.00$
$C_v = 560.00$
$x = ?$
$P = 2\,000.00$

Paso 2: Selección de la fórmula

$$x = \frac{U + C_f}{P - C_v}$$

Paso 3: Sustitución y resultado

$$x = \frac{0 + 900\,000}{2000 - 560}$$

$$x = \frac{900\,000}{1440}$$

$x =$ 625 unidades

El punto de equilibrio es (x, Ingreso)

El punto de equilibrio se integra al relacionar las unidades a punto de equilibrio con su correspondiente ingreso a P.E.

625
$*$ 2 000
(625, 1250 000)

Podemos comprobar el P.E. al elaborar un estado de resultados en donde el valor de la utilidad deberá ser igual a cero, recuerda que en el punto de equilibrio no hay utilidad.

Aquí esbozamos la parte inicial de un Estado de resultados para comprobar que efectivamente los ingresos menos costos da utilidad.

Ventas	625(2 000)	1250 000
$- C_v$	625(560)	350 000
UB		900 000
$- C_f$		900 000
U		0

Problema resuelto

En una empresa $C = 20x + 3\,000$ su función de costos, en tanto que su ingreso se representa por $I = 25x$, obtener su correspondiente P.E.

Respuesta

Paso 1: Identificación de datos

$I = 25x$
$C = 20x + 3\,000$

Paso 2: Selección de la fórmula

$I = C$

Paso 3: Sustitución y resultado

$I = C$
$25x = 20x + 3\,000$
$25x - 20x = 3\,000$
$5x = 3\,000$

$$x = \frac{3\,000}{5}$$

$x = 600$

El punto de equilibrio es (x, Ingreso)
(600, 15 000)

Alerta

Al referirnos a un Punto de Equilibrio la Utilidad vale Cero; ya que no hay utilidad por ser un P.E.

Alerta

El Punto de Equilibrio se presenta cuando el ingreso es igual al costo, ya que si el ingreso es mayor habrá utilidad, caso contrario se obtendrá pérdida.

Problema resuelto

El punto de equilibrio de una compañía es (100, 110 000) su costo fijo de producción es de $48 000.00 y el costo variable de $6 200.00 por cada 10 unidades, indica:

a) ¿Cuál es el precio de venta?

b) ¿Cuál es el importe del Costo Variable unitario?

c) ¿Cuántas unidades debe producir la compañía para el P.E.?

d) ¿Cuántas unidades se necesitan para lograr una utilidad de $50 400.00?

Respuesta

a) El precio de venta se obtiene de dividir el ingreso de 110 000 entre las 100 unidades.

b) El Costo variable unitario se obtiene al dividir el monto total entre las 10 unidades.

c) Unidades a P.E.

Paso 1: Identificación de datos

$C_f = 48\,000$

$C_v = 6\,200 \div 10 = 620$

$P = 110\,000 \div 100 = 1\,100$

$x = 100$

$U = 0$

Paso 2: Selección de la fórmula

$$x = \frac{U + C_f}{P - C_v}$$

Paso 3: Sustitución y resultado

$$x = \frac{0 + 48\,000}{1100 - 620}$$

$$x = \frac{48\,000}{480}$$

$x = 100$ unidades

El punto de equilibrio es (x, Ingreso)

$$\begin{array}{r} 100 \\ *\ 1100 \\ \hline (100, 110\,000) \end{array}$$

d) Unidades a obtener con Utilidad

Como se desea obtener las unidades del problema pero no en equilibrio, nuevamente se calculan las unidades pero ahora se emplea el valor de la utilidad, que en este caso no será de cero.

Paso 1: Identificación de datos

$C_f = 48\,000$

$C_v = 6\,200 \div 10 = 620$

$P = 110\,000 \div 100 = 1\,100$

$x = ?$

$U = 50\,400$

Paso 2: Selección de la fórmula

$$x = \frac{U + C_f}{P - C_v}$$

Paso 3: Sustitución y resultado

$$x = \frac{50\,400 + 48\,000}{1100 - 620}$$

$$x = \frac{98\,400}{480}$$

$x = 205$ unidades

Para obtener una utilidad de $50 400.00 se deben producir y vender 205 unidades.

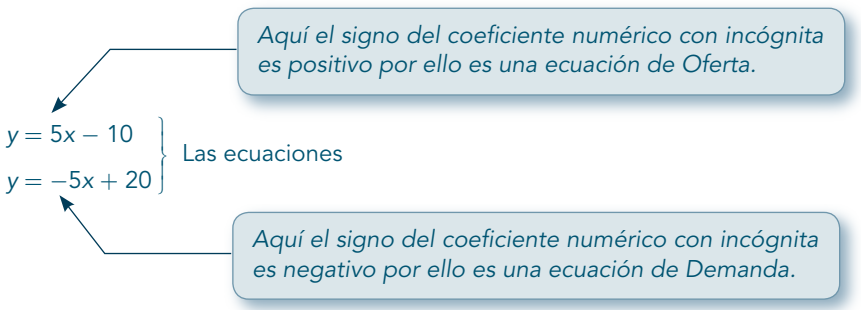
1.17 Punto de equilibrio en el mercado

El punto de equilibrio en el mercado se logra cuando a la oferta generada le corresponde una demanda aceptada; es decir, los ingresos de los productos se igualan con los costos de los bienes.

Para dar solución se recomienda seguir los siguientes pasos:

Paso 1: Identificación de cada ecuación

Para poder identificar si una ecuación es oferta o demanda bastará con ubicar el signo del coeficiente numérico de incógnita, en caso de ser positivo será oferta, caso contrario será demanda.


Aquí el signo del coeficiente numérico con incógnita es positivo por ello es una ecuación de Oferta.
$y = 5x - 10$
$y = -5x + 20$
Las ecuaciones
Aquí el signo del coeficiente numérico con incógnita es negativo por ello es una ecuación de Demanda.

Paso 2: La aplicación de un método de solución de dos incógnitas

Para dar solución a un ejercicio en el que se involucran dos ecuación con incógnitas pueden utilizarse diversos procedimientos, entre los más comunes se encuentran el método de igualación o el método de sustitución.

Paso 3: Obtención del valor de la primera incógnita

Al aplicar el método de solución de dos incógnitas, se obtiene el valor de la primera incógnita.

Paso 4: Obtención del valor de la segunda incógnita

El resultado del valor de la primera incógnita se sustituirá en cualquiera de las ecuaciones originales, para al sustituir tener solo una incógnita y obtener el valor de la segunda.

Paso 5: Integración del punto de equilibrio del mercado

El punto de equilibrio se presenta al relacionar x (las unidades de equilibrio) con y (el precio de equilibrio).

Paso 6: Representación gráfica del equilibrio de mercado

El punto de equilibrio se gráfica al asignar valores arbitrarios en la incógnita tanto de la ecuación de Oferta como de Demanda, presentándose el Punto de Equilibrio en la gráfica cuando se presenta el cruce en las rectas.

Alerta

El Equilibrio de Mercado se representa por dos ecuaciones una positiva (La oferta) y otra negativa (La demanda), que al igualarse logran el equilibrio de mercado.

Problema resuelto

Encontrar el punto de equilibrio del mercado, a partir de las siguientes ecuaciones de oferta y demanda: $y = 5x - 10$

$y = -5x + 20$

Respuesta

$y = 5x - 10$
$y = -5x + 20$

Paso 1: La identificación de cada ecuación, *debido al signo negativo de $-5x + 20$ esta es la ecuación de demanda, la otra ecuación es oferta por el signo positivo.*

$y = y$ **Al igualar las "y" esta se suprime y solo nos quedamos con una incógnita**

$5x - 10 = -5x + 20$
$5x + 5x = +20 + 10$
$10x = +30$
$x = \frac{30}{10}$
$x = 3$

Paso 2: La aplicación de un método de solución de dos incógnitas; *se decidió utilizar el método de igualación.*

Paso 3: Obtención del valor de la primera incógnita *en este caso obtenemos el valor de x como primera incógnita.*

La Oferta	La Demanda
$y = 5x - 10$	$y = -5x + 20$
$y = 5(3) - 10$	$y = -5(3) + 20$
$y = 15 - 10$	$y = -15 + 20$
$y = 5$	$y = 5$

Paso 4: Obtención del valor de la segunda incógnita: *sustituimos el resultado de la primera incógnita en las ecuaciones originales, para obtener el valor de la segunda incógnita.*

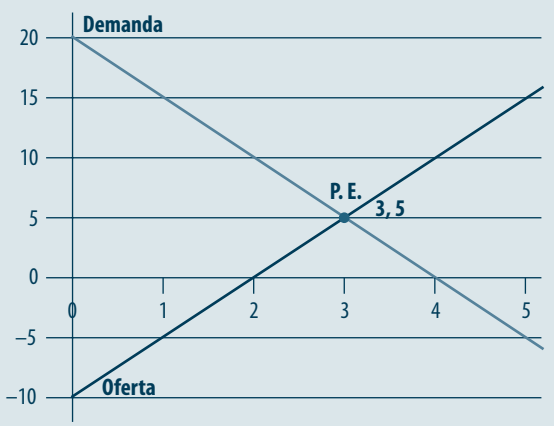
El Punto de Equilibrio
(3, 5)

Paso 5: Integración del punto de equilibrio del mercado *el punto de equilibrio, se obtiene de la relación (x, y), por tanto, nuestro punto es (3, 5).*

Paso 6: Representación gráfica del equilibrio del mercado.

$5x - 10 = y$	
0	−10
1	−5
2	0
3	+5
4	+10
5	+15

$-5x + 20 = y$	
0	+20
1	+15
2	+10
3	+5
4	0
5	−5



Problema resuelto

Determinar el punto de equilibrio del mercado, donde "p" es precio y "q" son las unidades a partir de las siguientes ecuaciones de oferta y demanda: $p = 20q - 22$, $p = -5q + 53$

Respuesta

$$p = 20q - 22$$
$$p = -5q + 53$$

Paso 1: La identificación de cada ecuación, *debido al signo negativo de* $-5q + 53$ *esta es la ecuación de demanda, la otra ecuación es oferta por el signo positivo.*

$$p = p$$

Al igualar las "*p*" esta se suprime y solo nos quedamos con una incógnita

$$20q - 22 = -5q + 53$$
$$20q + 5q = +53 + 22$$
$$25q = +75$$
$$q = \frac{75}{25}$$
$$q = 3$$

Paso 2: La aplicación de un método de solución de dos incógnitas; *se decidió utilizar el método de igualación.*

Paso 3: Obtención del valor de la primera incógnita *en este caso obtenemos el valor de "q" como primera incógnita.*

La Oferta	La Demanda
$p = 20q - 22$	$p = -5q + 53$
$p = 20(3) - 22$	$p = -5(3) + 53$
$p = 60 - 22$	$p = -15 + 53$
$p = 38$	$p = 38$

Paso 4: Obtención del valor de la segunda incógnita: *sustituimos el resultado de la primera incógnita en las ecuaciones originales, para obtener el valor de la segunda incógnita.*

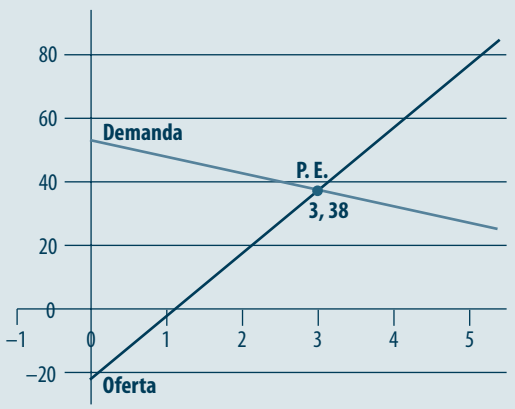
El Punto de Equilibrio
(3, 38)

Paso 5: Integración del punto de equilibrio del mercado *el punto de equilibrio, se obtiene de la relación* (*q*, *p*), *por tanto, nuestro punto es* (*3, 38*).

Paso 6: Representación gráfica del equilibrio del mercado.

$20q - 22 = p$	
0	−22
1	−2
2	+18
3	+38
4	+58
5	+78

$-5q + 53 = p$	
0	+53
1	+48
2	+43
3	+38
4	+33
5	+28



Problemas para resolver

1.1 Determina la ecuación de la recta de pendiente 0.2 y punto (5, 2)

1.2 Determina la ecuación de la recta de pendiente 0.2 y punto (−5, 2)

1.3 Determina la ecuación de la recta de pendiente 0.2 y punto (5, −2)

1.4 Determina la ecuación de la recta de pendiente 0.2 y punto (−5, −2)

1.5 Determina la ecuación de la recta de pendiente $-\frac{1}{2}$ y punto coordenado (0.3, −2.5)

1.6 Una persona planea hacer un recorrido de montaña, si después de un cuarto de hora ha subido 10 metros por un camino que presenta una pendiente de 0.15, determina cuántos metros habrá ascendido si el tiempo que ha transcurrido son 30 minutos

1.7 Diez artículos presentan una inclinación de 0.3 y un ingreso de $15.50, si esta tendencia continúa, ¿con cuántas unidades se alcanzarán $19.00 de ingreso?

1.8 Una empresa al vender 200 piezas de un artículo, obtiene un ingreso de $325 000.00 si en la planeación del próximo año, la gráfica muestra una inclinación de 684.10, determina cuántas piezas deben venderse para obtener $400 251.00, recuerda que x representa las unidades a venderse

1.9 En una empresa las unidades se presentan en el eje de las abscisas y su ingreso en el eje de las ordenadas, si su pendiente indica una disminución en ventas de −1.5 y su punto coordenado es (10, 15), indica el número de piezas con las cuales no hay ingreso

1.10 A un precio de $2.00 se venden 700 unidades, si la pendiente es de $\frac{3}{5}$ indica el valor de la ordenada al origen

1.11 Una persona que produce helados, ha observado que cuando un helado cuesta $5.00 en el exhibidor solo hay 50 helados, pero cuando el precio aumenta a $7.50 en el exhibidor hay 100 helados, obtener la ecuación de la recta que da solución al problema y represéntala en su forma general

1.12 Una empresa vende semanalmente 500 piezas del artículo Z−24, a un precio de $120.00 cada uno; desea cerrar su mes con una buena venta, por lo que ha decidido reducir 25% el precio actual, pensando que con ello venderá el doble, obtener la ecuación de la recta que da solución al problema y represéntela en su forma general

1.13 Una empresa industrial elabora x número de toneladas de un producto, solo que al fabricarlo genera desperdicio industrial, que a la cuarta semana sumará 500 kg y en la décima semana, 700 kg. Una persona que visitó la empresa le ofreció al dueño comprar el desperdicio industrial, siempre y cuando, recoja una tonelada. ¿Cuántas semanas tendrá que esperar el comprador para recoger 1 000 kg?

1.14 Una persona realiza una investigación de tendencias deportivas, se pregunta cuántas personas asistirán en los próximos 10 años al juego, para ello, toma como referencia los siguientes datos: la asistencia en 1980 a un juego de futbol fue de 10 320 personas, comparada con 12 200 en el año de 1985, si se desea conocer la asistencia año con año a partir de 1980, obtener la ecuación de la recta que da solución al planteamiento, indicando la asistencia en cada uno de los años

1.15 Una firma industrial ubicó que vende 200 unidades a $20.00, e investigando considera que las ventas caerán 25% si el precio se incrementa 50%, obtener la ecuación lineal del problema

1.16 Un campesino vendió al señor Pérez 50 borregos y 220 palomas en $66 150.00, si al mismo precio le vende a la señora Juanita 40 borregos y 180 palomas en $53 100.00. ¿Cuál es el precio de cada borrego?

1.17 En la granja mi tío envasó 450 litros de leche, utilizando botellas de 2 y 5 litros, si ocupó 120 botellas. ¿Cuántas botellas de cada tamaño utilizó?

1.18 Se tienen ahorradas 73 monedas de $0.50 centavos y $5.00; en total suman $99.50. ¿Cuántas monedas de cada valor se tiene?

1.19 Un granjero tiene 90 animales entre burros y patos, si las patas que se cuentan son 190. ¿Cuántos patos hay?

1.20 $2y - 20 = 12x$

$6y + 3x = 15$

1.21 $5x - 33 = 10y$

$6x = 15$

1.22 $5x - 33 = -12y - 6x$

$6x + 2 = 12y - 4$

1.23 $5x - 33 = y$

$-1 = 12y - 4$

1.24 $5x + y = -2y$

$x + 2 = -y + 17$

1.25 $5x = 2 - 3y$

$x + 2 = -y$

1.26 Una persona se ha impuesto una dieta, que consiste en comer tres veces a la semana fruta: lunes, miércoles y viernes, para los cuales compra la siguiente fruta: el lunes compró 1 kg de manzana, 2 kg de plátano y 1 kg de naranja, en total pagó $80.00. El miércoles solo compró 1 kg de manzana y 1 kg de plátano, de eso fue $45.00. Y el viernes nada más compró 4 kg de plátano y 1 kg de naranja, pagando $65.00. ¿Cuánto costó cada kilogramo de fruta?

1.27 Entre motocicletas, camionetas y helicópteros un general tiene a su cargo 200 unidades, si el total de llantas que se cuentan son 528 y todas las unidades pueden ser maniobradas por una persona excepto el helicóptero que requiere de dos soldados y su pelotón a su cargo son 202 soldados. ¿Cuántas unidades distintas tiene a su cargo?

SR Problemas aplicados a la realidad T Problemas para resolver con tecnología

1.28 $x_1 + x_2 + 2x_3 = +1$

$2x_1 - x_2 + 3x_3 = -3$

$x_1 + 2x_2 + x_3 = +4$

1.29 $-4x + 3y + 1w = 80$

$6x - 45 = -y$

$4y - 65 = -w$

1.30 $x_1 + 6x_2 + 2x_3 = +2$

$-x_2 + 3x_3 = -1$

$+5 + 2x_2 + 4x_3 = -x_1$

1.31 Una empresa produce y vende 75 artículos de fantasía, para elaborarlos emplea la siguiente función de costo $Ct = 30(x) + 1\,500$ siempre y cuando el precio de cada artículo sea de $50.00, se pide obtener las tres ecuaciones (Ingreso, Costos y Utilidad)

1.32 Una empresa presenta una función de costo $C_t = 5(x) + 90$ y cuando el precio es de $35.00, obtener las tres ecuaciones (Ingreso, Costos y Utilidad)

1.33 Una empresa presenta las funciones de $I = 75(x)$ y $Ct = 80(x) + 9\,000$ obtener la ecuación de Utilidad

1.34 Una compañía productora tiene un costo fijo de $952 000.00, un costo variable unitario de $520.00, un precio de venta de $9 000.00, esto le permite obtener una utilidad de $489 600.00. Determina el número de unidades que produce

1.35 Determina las unidades que una empresa debe producir para obtener una utilidad de $30 000.00, si presenta un costo fijo de $11 250.00, un costo variable por cada dos unidades de $480.00 y un precio de venta de $350.00

1.36 Un comercio tiene un costo fijo de $910.00, un precio de venta de $100.00, un costo variable unitario de $60.00 y una utilidad de $250.00. Determina las unidades para lograr esa utilidad

1.37 Un empresario tiene un costo fijo de $1 250 000.00, un precio de venta de $10.00, un costo variable unitario de $6.00 con lo cual se espera obtener una utilidad de $300 000.00. Determina las unidades que se deben producir para lograr esa utilidad

1.38 Una industria presenta la siguiente función de costo total $C_t = 7\,225\,000 + 2\,500x$, se informa que el precio de venta por unidad fabricada es de $100 000.00, con lo cual pretende obtener una utilidad de $965 000.00. Obtener las unidades que hacen cumplir las condiciones del problema

1.39 Una persona piensa ganar en esta temporada $14 000.00, para lograrlo debe vender su producto en $120.00, si su costo variable es 45% del valor del precio de venta y su costo fijo es de $3 160.00, ¿cuántas unidades debe vender para lograr esa utilidad?

1.40 Un industrial sabe que para ofrecer una refacción en $100.00, se requiere cubrir los siguientes costos $C_t = 3\,440 + 60x$, lo cual le arrojará una utilidad de $14 000.00. Determina las unidades que el industrial debe fabricar

1.41 Una producción de 7 250 unidades presenta costos variables por unidad producida de $10.00 y cada una se vende al doble del costo variable, si la utilidad que se obtiene por la producción es de $5 000.00, cuál es el importe del costo fijo

1.42 Al producir 500 unidades el costo variable representa 10% del precio de venta, si vendemos cada unidad en $120.00 se obtiene una utilidad de $35 000.00, obtener el importe del costo fijo

1.43 Un comercio presenta un precio de venta de $100.00, un costo variable unitario por $60.00 y una utilidad de $250.00 al producir 29 unidades, obtener el valor del costo fijo utilizado para lograr esa utilidad

1.44 Un empresario ofrece un lote de 387 500 productos a un precio de venta unitario de $10.00, si cada artículo tiene $6.00 de costo variable y él pretende ganarse $300 000.00. Cuál es el importe del costo fijo total

1.45 Una industria presenta la siguiente función de ingreso $I = 100\,000(x)$, si se fabrican 84 unidades y su costo variable total de fabricación es de $210 000.00 y el industrial espera una utilidad de $965 000.00. Cuál será el importe del costo fijo total

1.46 Una persona piensa ganar en esta temporada $14 000.00, para lograrlo debe vender su producto en $120.00, si su costo variable es 45% del valor del precio de venta y produce 260 unidades, cuál será el valor del costo fijo que la persona invertirá

1.47 Se presenta un costo variable de $300.00 al producir 5 refacciones, si cada una se vende a $100.00 y no se pretende de utilidad, determina el importe del costo fijo total

1.48 El costo de 30 artículos está representado por la siguiente función $C_t = 5\,000 + 3\,750(x)$, si la utilidad a obtenerse es de $1 600.00, ¿cuál es su precio?

1.49 Una industria automotriz sabe que el costo de producir un automóvil se representa a través de la siguiente función $C_t = 500\,000 + 250\,000(x)$, si la utilidad a obtenerse es de $200 000.00, ¿cuál será el precio de lista del automóvil?

1.50 Un comercio tiene un costo fijo de $910.00, un costo variable unitario de $60.00 y una utilidad de $250.00 al producir 29 unidades, para lograr esa utilidad a qué precio debe darse cada uno

1.51 Un empresario tiene un costo fijo de $1 250 000.00, un costo variable de $60.00 por cada 10 unidades, si la actual producción es de 387 500 piezas y la utilidad que se espera es de $300 000.00. ¿Cuál será el precio de venta de cada pieza?

1.52 Una industria presenta la función de costo total $C_t = 7\,225\,000 + 2\,500(x)$, se informa que la utilidad esperada es de $965 000.00 cuando se producen 84 unidades. Obtener el precio de venta que hacen cumplir las condiciones del problema

Problemas para resolver

1.53 Una persona piensa ganar en esta temporada $14 000.00, para lograrlo debe vender 260 artículos de temporada, sus costos se reflejan en la siguiente ecuación $C_t = 54(x) + 3\,160.00$, obtener el precio a que se debe vender para lograr esa utilidad

1.54 Un industrial sabe que al ofrecer 436 unidades ganará $14 000.00 siempre y cuando el importe de su costo variable total sea de $26 160.00 y el importe de su costo fijo sea de $3 440.00, obtener el precio unitario a ofrecer de cada pieza

1.55 Cuando una empresa produce 800 piezas presenta costos fijos por $65 000.00, si ofrece cada pieza en $200.00, obtendrá una utilidad de $15 000.00, determina el importe del costo variable unitario

1.56 Cuando una empresa produce 50 refacciones, su costo fijo es de $65 000.00, cada refacción la vende en $10 000.00, si desea obtener una utilidad de $15 000.00, cuál es el importe del costo variable unitario

1.57 Un comercio tiene un costo fijo de $910.00, un precio de venta de $100.00 y una utilidad de $250.00 al producir 29 unidades, indica cuánto representa su costo variable unitario

1.58 Un empresario tiene una producción de 20 000 unidades, un costo fijo de $100 000.00 y un precio de venta de 4% del valor del costo fijo, si la utilidad a obtenerse es de $400 000.00, cuál es el importe del costo variable

1.59 Un industrial sabe que al ofrecer 455 unidades ganará $14 000.00 siempre y cuando el importe de su costo fijo sea de $4 200.00 y el precio de venta sea de $100.00, obtén el valor del costo variable de cada pieza a ofrecer

1.60 Un fabricante sabe que su costo fijo de producción son $2 800.00, que su costo variable es 20% del valor del artículo producido, si se producen 40 piezas se obtiene un ingreso de $4 000.00, indica, ¿cuál es la utilidad esperada?

1.61 Para que una empresa no tenga pérdida, vende un producto en $1 100.00, su costo fijo de producción es de $480 000.00, el costo variable es de $62 000.00 por cada 100 piezas, indica cuál es el valor de la utilidad en el P.E.

1.62 Para que una empresa obtenga P.E., debe vender un producto en $380.00, su costo fijo de producción es de $1 200.00, si el costo variable es de $350.00. ¿Cuántas unidades deben producirse para lograrlo?

1.63 Obtener el P.E., si las funciones son $I = 99(x)$ y $C_t = 66(x) + 3\,333$. ¿Cuántas unidades se deben producir para lograrlo?

1.64 Un comercio al producir 29 unidades emplea un costo fijo de $910.00, un costo variable unitario de $60.00 y ofrece cada pieza en $100.00

a. Determina cuál es la utilidad del comercio

1.65 Un empresario produce 387 500 piezas y ofrece cada una con valor de $10.00, emplea para ello la siguiente función de costos $C_t = 6(x) + 1\,250\,000.00$

a. Determina la utilidad del empresario

1.66 Una empresa al fabricar 160 unidades presenta la función $C_t = 1\,200\,000 + 2\,500(x)$, si cada unidad se vende a $10 000.00, cuál es la utilidad de la empresa

1.67 Un industrial sabe que para ofrecer una refacción en $100.00, requiere cubrir los siguientes costos $C_t = 3\,440 + 60(x)$, indica las unidades que se deben fabricar para no perder ni ganar

1.68 Determina el punto de equilibrio del mercado al presentarse las siguientes ecuaciones de oferta y demanda:
$y = 2x - 14$
$y = -5x + 42$

1.69 Determina el punto de equilibrio del mercado al presentarse las siguientes ecuaciones de oferta y demanda:
$p - 20 = -1.5q$
$p = 8q + 1$

1.70 Grafica el punto de equilibrio del mercado si se tienen las siguientes ecuaciones de oferta y demanda:
$p = 8q + 1$
$p = -1.5q + 20$

1.71 Obtener y graficar el punto de equilibrio del mercado si se tienen las siguientes ecuaciones de oferta y demanda:
$y = -0.5x + 22$
$0 = -y + 5x + 5.5$

1.72 Obtener y graficar el punto de equilibrio del mercado si se tienen las siguientes ecuaciones de oferta y demanda:
$y = -0.5x + 18.5$
$0 = -y + 12x + 6$

1.73 Obtener y graficar el punto de equilibrio del mercado si se tienen las siguientes ecuaciones de oferta y demanda:
$y = -2x + 7$
$y = +x + 1$

1.74 Obtener y graficar el punto de equilibrio del mercado si se tienen las siguientes ecuaciones de oferta y demanda:
$y = -x + 12$
$y = x - 10$

1.75 Obtener y graficar el punto de equilibrio del mercado si se tienen las siguientes ecuaciones de oferta y demanda:
$y = -15x + 30$
$y = +5x - 10$

PROBLEMAS RETO

1

Una persona que visitó el zoológico encontró un crucigrama indicando que quien lo adivine recibirá un premio. Las pistas a seguir son las siguientes: entre tortugas, patas y patos, hay 75 animales, si el número de patas que se cuentan son 264, ¿cuántos habrá de cada tipo?

2

Un gerente divisional recibe el siguiente informe del departamento de costos.

Departamento de costos: informe relativo al juguete de novedad

Lic. sirva la presente para saludarlo e indicarle que al inicio de las operaciones en la producción presentamos un costo de $35 000.00 y cuando alcanzamos la producción de 250 unidades nuestro costo se ve reflejado en $65 000.00, por lo cual este departamento siguiere que el juguete de novedad sea vendido en $400.00 y la caja sea empacada con 500 piezas, sin más por el momento reciba un cordial saludo.

En base a la redacción anterior se te pide que respondas lo siguiente:

a) ¿Cuál es el importe del Costo Variable Unitario?

b) ¿Cuál es el importe del Costo Fijo?

c) ¿Cuál es el importe del costo total de una caja?

d) Obtener la ecuación lineal que representa el problema

e) Obtener la representación gráfica

3

Encuentra el punto de equilibrio del mercado, a partir de las siguientes ecuaciones de oferta y demanda: $y = 20x - 25,\ x = -\frac{1}{10}y + 18.5$

4

Encuentra el punto de equilibrio del mercado, a partir de las siguientes ecuaciones de oferta y demanda: $p = \frac{1}{50}q + 2\,,\ p = -\frac{1}{150}q + 182$

UNIDAD 2

La ecuación cuadrática: la curva, la parábola, el vértice y las aplicaciones administrativas de Máximos y Mínimos

OBJETIVOS

- Diferenciar entre un problema lineal de uno cuadrático.
- Conocer las distintas fórmulas aplicables a las curvas.
- Calcular los valores críticos.
- Identificar los distintos elementos de una parábola.
- Graficar parábolas (con vértice en el origen y fuera de él).
- Identificar las distintas aplicaciones administrativas.
- Interpretar los resultados máximos o mínimos obtenidos.

¿QUÉ SABES?

- ¿Una ecuación cuadrática tiene dos valores de solución?
- Si en la ecuación falta el término dependiente, ¿la fórmula general tiene solución?
- ¿Un foco comercial tendrá relación con una parábola?
- La antena de mi casa parece un plato, ¿entonces su estructura es una parábola?
- ¿Es simétrica o asimétrica una parábola?
- ¿Empleando la forma canónica se obtienen máximos y mínimos?

2.1 Introducción

Un ejercicio cuadrático o de segundo grado, es aquella expresión matemática que presenta en una de sus variables, un exponente o potencia a la "DOS".

Ejemplo $8^2 = (8)(8) = 64$; donde el (8) se ve representado dos veces, por estar elevado al cuadrado y al extraer su raíz (la operación contaría a elevar a una potencia cuadrada), se obtiene el valor original; por lo tanto $8^2 = (8)(8) = 64$ y $\sqrt{64} = 8$

Ejemplos:

$3^2 = (3)(3) = 9$ y $\sqrt{9} = 3$

$11^2 = (11)(11) = 121$ y $\sqrt{121} = 11$

2.2 El radical

Un radical indica la extracción de una raíz, lo inverso de calcular potencias, al emplear un radical $\sqrt[n]{\blacksquare}$ este se forma por el radicando "■" y ^{n} el índice de la raíz $\sqrt[\text{índice}]{\text{radicando}}$.

2.3 Raíz cuadrada

La raíz cuadrada es la expresión inversa de elevar al cuadrado, al utilizarse un radical; la operación de extraer raíz $\sqrt{\ }$.

En algunas ocasiones el índice de la raíz no se indica, pues se da por entendido que se refiere a una raíz cuadrada y que el valor de su índice es "dos"; por ello, es común encontrar cualquiera de estas dos presentaciones; $\sqrt{\blacksquare}$ *o* $\sqrt[2]{\blacksquare}$ *ambas buscan extraer la raíz cuadrada del cuadrado.*

2.4 Características de la raíz cuadrada

Las raíces cuadradas presentan las siguientes características:

Radicando positivo, existirán siempre dos raíces reales.	$\sqrt{\text{valor positivo}} =$ primera raíz real / segunda raíz real
Radicando cero, no se cumplirá la condición de dos raíces reales.	$\sqrt{\text{valor cero}} = 0$
Radicando negativo, no tiene raíces reales.	$\sqrt{\text{valor negativo}} =$ "error"

Alerta

¿Por qué existen 2 raíces reales?
Porque su resultado debe tomar en cuenta los signos de la raíz (+) (−).

2.5 Ecuación cuadrática

Expresión que involucra a *x* la variable independiente y a *y* la variable dependiente al presentarse la forma general $y = ax^2 + bx + c$ donde ***a***, ***b***, ***c*** son los datos del ejercicio.

Como puede observarse un término está al cuadrado y otro no tiene cuadrado, por ese simple hecho son diferentes y no se pueden simplificar; por lo cual debe emplearse otro procedimiento, el cual forzosamente utilizará una raíz por el cuadrado que presenta.

2.6 Fórmula general de segundo grado

Fórmula utilizada para obtener las raíces reales de una ecuación cuadrática, véase lo siguiente:

$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	Cuando $b^2 - 4ac > 0$	Habrá dos raíces reales
	Cuando $b^2 - 4ac < 0$	No habrá raíces reales
	Cuando $b^2 - 4ac = 0$	Habrá una raíz real

Obsérvese que en la fórmula solo se presentan tres diferentes letras.

¿Pero cuáles son y qué valor tienen?

a	es el coeficiente numérico del término al Cuadrado o Término Cuadrático
b	es el coeficiente numérico del término a la UNO o Término Dependiente
c	es el coeficiente numérico del término SIN LETRA o Término Independiente

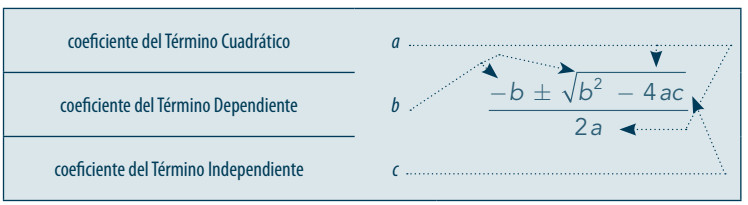
Para dar solución a un problema de segundo grado se recomienda seguir los siguientes pasos:

Paso 1: Igualar a cero la ecuación cuadrática

La ecuación a resolverse siempre debe estar igualada a cero; en caso de que la ecuación este igualada a un valor distinto; este deberá despejarse pasándose del otro lado de la igualdad para así igualar a cero.

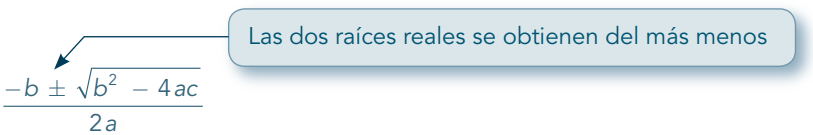
Paso 2: Identificar los valores a introducirse en la fórmula

Recuerda aquí se debe identificar quién es ***a***, ***b***, ***c***



Paso 3: Obtener la solución

Al darle solución al ejercicio se determina su resultado obteniéndose las raíces reales del problema (los dos valores críticos); que al ejercicio dan solución.



Problema resuelto

Obtener las raíces exactas de la siguiente ecuación $2x^2 + 3x - 2 = 0$

Respuesta

$2x^2 + 3x - 2 = 0$

Paso 1: Igualar a cero la ecuación cuadrática: *en este caso como puede verse la ecuación ya está igualada a cero.*

Los valores son:

$a = 2$
$b = 3$
$c = -2$

Paso 2: Identificar los valores a introducirse en la fórmula; *aquí se observan los valores con todo y signo.*

Respuesta (*continuación*)

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Paso 3: Obtener la solución: *como el ejercicio presenta un cuadrado se aplica la fórmula general de segundo grado; observemos la sustitución de los valores en la fórmula.*

$$\frac{-(3) \pm \sqrt{(3)^2 - 4(2)(-2)}}{2(2)}$$

Operaciones

$$\begin{cases} -(3) = -3 \\ (3)^2 = 9 \\ -4(2)(-2) = +16 \\ 2(2) = 4 \end{cases}$$

$$\frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4}$$

$$\frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4}$$

Simplificación del valor del radicando $\sqrt{25} = 5$

$$\frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} \frac{-3+5}{4} = \frac{+2}{4} = +0.5 \\ \frac{-3-5}{4} = \frac{-8}{4} = -2 \end{cases}$$

Las dos raíces reales

Para comprobar que los valores obtenidos son las raíces exactas del ejercicio al sustituir los resultados en la ecuación original la igualdad debe cumplirse.

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3x - 2 &= 0 \\ 2(0.5)^2 + 3(0.5) - 2 &= 0 \\ 0.5 + 1.5 - 2 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3x - 2 &= 0 \\ 2(-2)^2 + 3(-2) - 2 &= 0 \\ 8 - 6 - 2 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Problema resuelto

Obtener las raíces exactas de la siguiente ecuación $-4x^2 - 25x - 36 = 0$

Respuesta

$-4x^2 - 25x - 36 = 0$

Paso 1: Igualar a cero la ecuación cuadrática: *en este caso como puede verse la ecuación ya está igualada a cero.*

Los valores son:

$a = -4$
$b = -25$
$c = -36$

Paso 2: Identificar los valores a introducirse en la fórmula; *aquí se observan los valores con todo y signo.*

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Paso 3: Obtener la solución: *como el ejercicio presenta un cuadrado se aplica la fórmula general de segundo grado.*

$$\frac{-(-25) \pm \sqrt{(-25)^2 - 4(-4)(-36)}}{2(-4)}$$

Operaciones

$$\begin{cases} -(-25) = +25 \\ (-25)^2 = 625 \\ -4(-4)(-36) = -576 \\ 2(-4) = -8 \end{cases}$$

Respuesta (*continuación*)

$$\frac{+25 \pm \sqrt{625 - 576}}{-8}$$

$$\frac{+25 \pm \sqrt{49}}{-8}$$

Simplificación del valor del radicando $\sqrt{49} = 7$

$$\frac{+25 \pm 7}{-8} = \begin{cases} \dfrac{+25 + 7}{-8} = \dfrac{32}{-8} = -4 \\ \dfrac{+25 - 7}{-8} = \dfrac{18}{-8} = -2.25 \end{cases}$$

Las dos raíces reales

Para comprobar que los valores obtenidos son las raíces exactas del ejercicio al sustituir los resultados en la ecuación original la igualdad debe cumplirse.

$$\begin{aligned} -4x^2 - 25x - 36 &= 0 \\ -4(-4)^2 - 25(-4) - 36 &= 0 \\ -64 + 100 - 36 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -4x^2 - 25x - 36 &= 0 \\ -4(-2.25)^2 - 25(-2.25) - 36 &= 0 \\ -20.25 + 56.25 - 36 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Problema resuelto

Obtener las raíces exactas de la siguiente ecuación $x^2 - 41x = -40$

Respuesta

$$x^2 - 41x = -40$$
$$x^2 - 41x + 40 = 0$$

Paso 1: Igualar a cero la ecuación cuadrática: *en este caso como se observa no está igualada a cero*, por ello el -40 pasará del otro lado de la igualdad.

Los valores son:

$\boldsymbol{a = 1}$
$\boldsymbol{b = -41}$
$\boldsymbol{c = 40}$

Paso 2: Identificar los valores a introducirse en la fórmula; *aquí se observan los valores con todo y signo.*

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Paso 3: Obtener la solución: *como el ejercicio presenta un cuadrado se aplica la fórmula general de segundo grado.*

$$\frac{-(-41) \pm \sqrt{(-41)^2 - 4(1)(40)}}{2(1)}$$

Operaciones
$$\begin{cases} -(-41) = +41 \\ (-41)^2 = 1\,681 \\ -4(1)(40) = -160 \\ 2(1) = 2 \end{cases}$$

$$\frac{+41 \pm \sqrt{1681 - 160}}{2}$$

$$\frac{+41 \pm \sqrt{1521}}{2}$$

Simplificación del valor del radicando $\sqrt{1521} = 39$

$$\frac{+41 \pm 39}{2} = \begin{cases} \dfrac{+41 + 39}{2} = \dfrac{80}{2} = 40 \\ \dfrac{+41 - 39}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

Las dos raíces reales

Alerta

Cuando la ecuación cuadrática esté igualada a un valor distinto de cero deberá despejarse.

Respuesta (*continuación*)

Para comprobar que los valores obtenidos son las raíces exactas de este otro ejercicio al sustituir los resultados la igualdad debe cumplirse.

$$x^2 - 41x + 40 = 0$$
$$(40)^2 - 41(40) + 40 = 0$$
$$1\,600 - 1\,640 + 40 = 0$$
$$0 = 0$$

$$x^2 - 41x + 40 = 0$$
$$(1)^2 - 41(1) + 40 = 0$$
$$1 - 41 + 40 = 0$$
$$0 = 0$$

Problema resuelto

Obtener las raíces exactas de la siguiente ecuación $-x^2 = -2x + 1$

Respuesta

$$-x^2 = -2x + 1$$
$$-x^2 + 2x - 1 = 0$$

Paso 1: Igualar a cero la ecuación cuadrática: *en este caso como se observa no está igualada a cero*, por ello despejaremos para igualar a cero.

Los valores son:

$$\boldsymbol{a = -1}$$
$$\boldsymbol{b = +2}$$
$$\boldsymbol{c = -1}$$

Paso 2: Identificar los valores a introducirse en la fórmula; *aquí se observan los valores con todo y signo.*

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Paso 3: Obtener la solución: *aplica la fórmula general de segundo grado.*

$$\frac{-(+2) \pm \sqrt{(+2)^2 - 4(-1)(-1)}}{2(-1)}$$

Operaciones
$$\begin{cases} -(+2) = -2 \\ (+2)^2 = 4 \\ -4(-1)(-1) = -4 \\ 2(-1) = -2 \end{cases}$$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4}}{-2}$$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{0}}{-2}$$ Simplificación del valor del radicando $\sqrt{0} = 0$

$$\frac{-2 \pm 0}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$ La única raíz real

Para comprobar que el valor obtenido es la raíz exacta sustituimos su valor.

$$-x^2 + 2x - 1 = 0$$
$$-(1)^2 + 2(1) - 1 = 0$$
$$-1 + 2 - 1 = 0$$
$$0 = 0$$

Alerta

Cuando el radicando es cero solo se obtiene una raíz real.

En ocasiones encontramos ejercicios incompletos pues unos carecen de término lineal y otros de término independiente y es en cualquiera de los casos en donde el término faltante deberá completarse con un valor de cero, ya que ambos ejercicios sí tienen solución, véanse los siguientes problemas.

Ejercicio con término dependiente faltante

Problema resuelto

Obtener las raíces exactas de la expresión $x^2 = 9$

Respuesta

$$x^2 = 9$$
$$x^2 - 9 = 0$$

Paso 1: Igualar a cero la ecuación cuadrática: pasamos 9 al otro lado de la igualdad para igualarla a cero.

Los valores son:

$$a = 1$$
$$b = 0$$
$$c = -9$$

Paso 2: Identificar los valores a introducirse en la fórmula; *aquí se observan los valores con todo y signo.*

Como se observa, el faltante es el término lineal; por ello su valor es Cero

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Paso 3: Obtener la solución: aplica la fórmula general.

$$\frac{-(0) \pm \sqrt{(0)^2 - 4(1)(-9)}}{2(1)}$$

Operaciones $\begin{cases} -4(1)(-9) = +36 \\ 2(1) = 2 \end{cases}$

$$\frac{0 \pm \sqrt{36}}{2}$$

Simplificación del valor del radicando $\sqrt{36} = 6$

$$\frac{0 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{0+6}{2} = \frac{6}{2} = +3 \\ \frac{0-6}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \end{cases} \rightarrow \text{Las dos raíces reales}$$

Para comprobar que los valores son las raíces exactas del ejercicio sustituimos los resultados en la ecuación original.

$$x^2 = 9$$
$$(+3)^2 = 9$$
$$(+3)(+3) = 9$$
$$9 = 9$$

$$x^2 = 9$$
$$(-3)^2 = 9$$
$$(-3)(-3) = 9$$
$$9 = 9$$

Como se obtiene una igualdad; los resultados sí son las raíces exactas del ejercicio.

Alerta

Cuando un término falte su valor será completado con un cero.

Ejercicio con término independiente faltante

Problema resuelto

Obtener las raíces exactas de la siguiente expresión $5x^2 + 4x = -2x$

Respuesta

$$5x^2 + 4x = -2x$$
$$5x^2 + 4x + 2x = 0$$

Paso 1: Igualar a cero la ecuación cuadrática: *en este caso* $-2x$ *debe pasar del otro lado de la igualdad para igualar a cero.*

Los valores son:

$$a = 5$$
$$b = 6$$
$$c = 0$$

Paso 2: Identificar los valores a introducirse en la fórmula; *aquí se observan los valores con todo y signo.*

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Paso 3: Obtener la solución: aplica la fórmula general.

$$\frac{-(6) \pm \sqrt{(6)^2 - 4(5)(0)}}{2(5)}$$

Operaciones
$$\begin{cases} -(6) = -6 \\ (6)^2 = 36 \\ -4(5)(0) = 0 \\ 2(5) = 10 \end{cases}$$

$$\frac{-6 \pm \sqrt{36}}{10}$$

Simplificación del valor del radicando $\sqrt{36} = 6$

$$\frac{-6 \pm 6}{10} = \begin{cases} \frac{-6+6}{10} = \frac{0}{10} = 0 \\ \frac{-6-6}{10} = \frac{-12}{10} = -1.2 \end{cases}$$

Las dos raíces reales

Para comprobar se sustituyen los resultados en la ecuación original, observar lo siguiente:

$$5x^2 + 4x + 2x = 0$$
$$5x^2 + 6x = 0$$
$$5(0)^2 + 6(0) = 0$$
$$0 + 0 = 0$$
$$0 = 0$$

$$5x^2 + 4x + 2x = 0$$
$$5x^2 + 6x = 0$$
$$5(-1.2)^2 + 6(-1.2) = 0$$
$$7.2 - 7.2 = 0$$
$$0 = 0$$

Todas las funciones cuadráticas pueden ser representadas por una curva la cual para obtenerse puede tabularse, véase lo siguiente:

2.7 Representación gráfica de una función de segundo grado

Toda función cuadrática se puede graficar, su representación será una curva donde el signo del coeficiente cuadrático indicará si abre hacia arriba o hacia abajo, ya que cuando el término cuadrático es positivo abre hacia arriba y si es negativo abre hacia abajo; observar lo siguiente:

El vértice de la curva se obtiene al calcular el punto coordenado $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ (x, y)

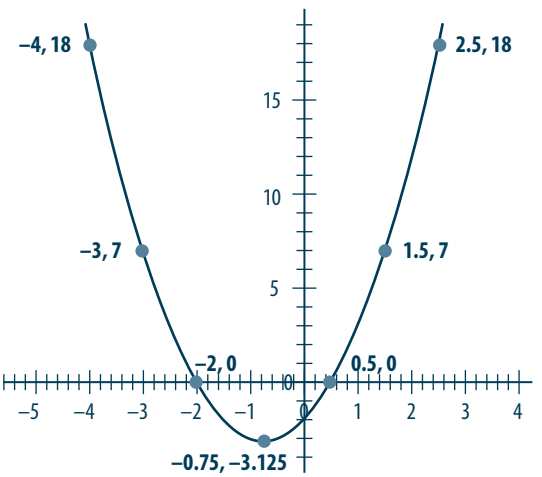
Obtener la gráfica de la función $2x^2 + 3x - 2 = 0$

$$\left(\frac{-3}{2(2)}, \frac{4(2)(-2) - (3)^2}{4(2)}\right) = \begin{matrix} x & y \\ -0.75, & -3.125 \end{matrix}$$

El vértice

$$2x^2 + 3x - 2 =$$
$$2(2.5)^2 + 3(2.5) - 2 = 18$$
$$2(1.5)^2 + 3(1.5) - 2 = 7$$
$$2(0.5)^2 + 3(0.5) - 2 = 0$$
$$2(-2)^2 + 3(-2) - 2 = 0$$
$$2(-3)^2 + 3(-3) - 2 = 7$$
$$2(-4)^2 + 3(-4) - 2 = 18$$

Valor x	Valor y
2.5	18
1.5	7
0.5	0
−2	0
−3	7
−4	18



Alerta

Cuando el signo del término cuadrático es positivo la curva abre hacia arriba.

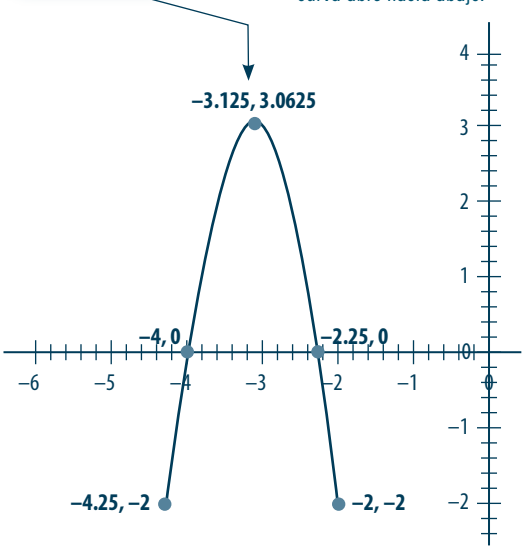
Obtener la gráfica de la función $-4x^2 - 25x - 36 = 0$

$$\left(\frac{-(-25)}{2(-4)}, \frac{4(-4)(-36) - (-25)^2}{4(-4)}\right) = \begin{matrix} x & y \\ -3.125, & 3.0625 \end{matrix}$$

El vértice

$$-4x^2 - 25x - 36 =$$
$$-4(-4)^2 - 25(-4) - 36 = 0$$
$$-4(-4.25)^2 - 25(-4.25) - 36 = -2$$
$$-4(-2)^2 - 25(-2) - 36 = -2$$
$$-4(-2.25)^2 - 25(-2.25) - 36 = 0$$

Valor x	Valor y
−4	0
−4.25	−2
−2	−2
−2.25	0



Alerta

Cuando el signo del término cuadrático es negativo la curva abre hacia abajo.

Las curvas al graficarse presentan la forma de una parábola, en donde el signo del coeficiente cuadrático denotará su orientación.

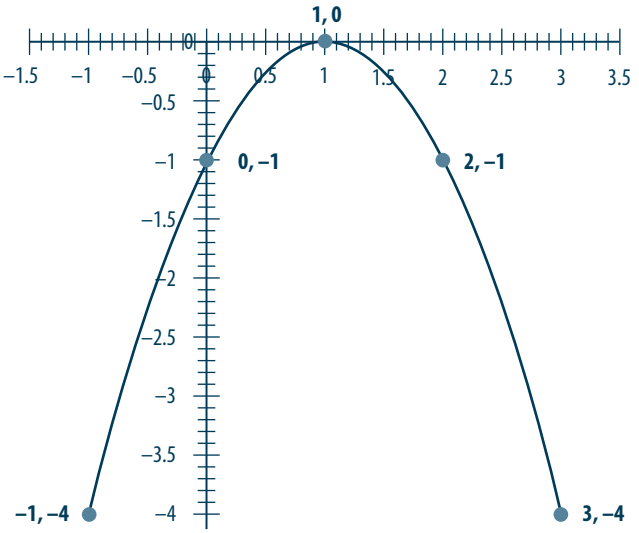
Coeficiente cuadrático de signo positivo	Cóncava hacia arriba
Coeficiente cuadrático de signo negativo	Cóncava hacia abajo

En el ejercicio $-x^2 + 2x - 1 = 0$

$$\left(\frac{-(2)}{2(-1)}, \frac{4(-1)(-1) - (2)^2}{4(-1)}\right) = \begin{pmatrix} x, & y \\ 1, & 0 \end{pmatrix}$$

$$-x^2 + 2x - 1 =$$
$$-(3)^2 + 2(3) - 1 = -4$$
$$-(2)^2 + 2(2) - 1 = -1$$
$$-(0)^2 + 2(0) - 1 = -1$$
$$-(-1)^2 + 2(-1) - 1 = -4$$

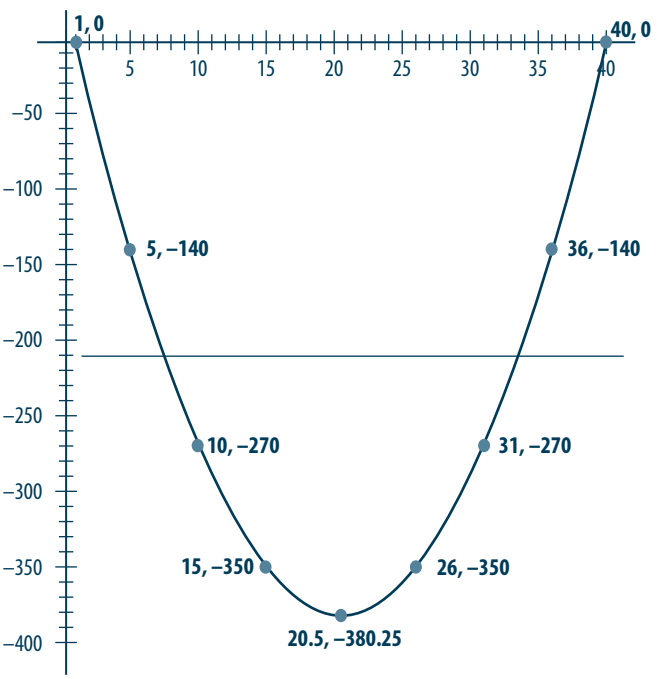
Valor x	Valor y
3	−4
2	−1
0	−1
−1	−4



En el ejercicio $x^2 - 41x + 40 = 0$

$$\left(\frac{-(-41)}{2(1)}, \frac{4(1)(40) - (-41)^2}{4(1)}\right) = \begin{pmatrix} x, & y \\ 20.5, & -380.25 \end{pmatrix}$$

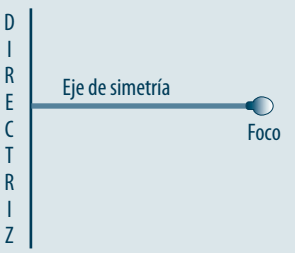
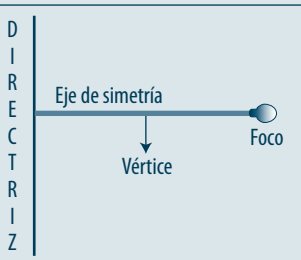
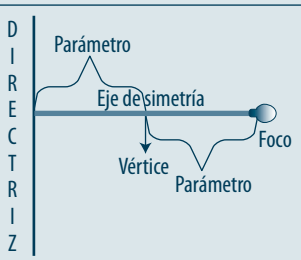
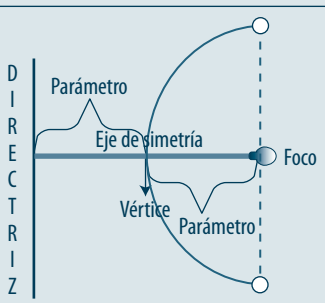
$(40)^2 - 41(40) + 40 = 0$
$(36)^2 - 41(36) + 40 = -140$
$(31)^2 - 41(31) + 40 = -270$
$(26)^2 - 41(26) + 40 = -350$
$(20.5)^2 - 41(20.5) + 40 = -380.25$ ← Vértice
$(15)^2 - 41(15) + 40 = -350$
$(10)^2 - 41(10) + 40 = -270$
$(5)^2 - 41(5) + 40 = -140$
$(1)^2 - 41(1) + 40 = 0$



Una curva es una parábola y esta tiene una representación simétrica ya que si se toma como punto de referencia al vértice y se traza una línea imaginaria paralela al eje y, se obtendrán dos partes iguales, por ello los valores que se obtienen a uno y otro extremo del vértice son los mismos; obsérvese el ejercicio anterior.

2.8 Parábola

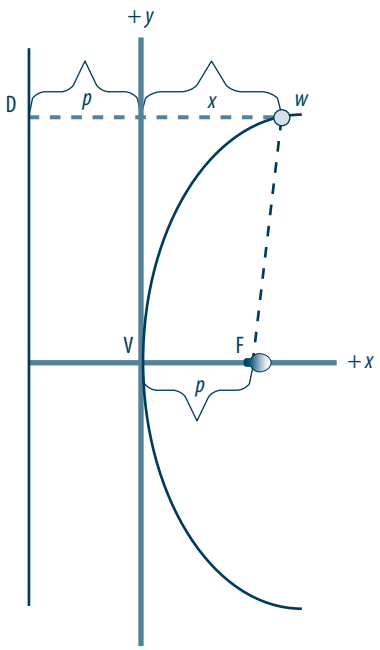
Llamamos parábola al lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan (están a la misma distancia) de un punto fijo llamado foco y de una recta fija llamada directriz, obsérvese lo siguiente:

Directriz: Recta fija trazada equidistante de un punto fijo llamado foco.	
Eje de Simetría: Semirrecta perpendicular a la directriz, trazada desde el foco a la directriz.	
Vértice de la parábola: Se encuentra ubicado a la mitad del eje de simetría; es decir, el punto medio entre la directriz y el foco.	
Parámetro: Es la distancia de la directriz al vértice o del vértice al foco, ambos tienen el mismo valor.	
Ancho focal o Lado recto: Es el valor que indica la amplitud o anchura de la parábola, su valor se calcula a través de la fórmula "4p" y de lo que resulte se dividirá en dos partes iguales, ubicando cada una a la misma distancia en uno y otro extremo del foco cumpliendo así el precepto de ancho focal.	

Una parábola es la representación de una función de segundo grado y como característica se puede observar lo siguiente:

- Al conocer la ubicación de la directriz y el foco en el punto medio del segmento de recta localizamos el vértice.
- Al ubicar el foco identifico hacia dónde abre la parábola.
- Al ubicar la distancia entre la directriz y el vértice o el vértice con el foco conozco el valor del parámetro.

2.9 Integración de la parábola con vértice en el origen



En base a su definición tenemos lo siguiente:

La distancia de la recta fija llamada directriz (*D*) al punto *w* es la misma que del punto *w* al foco (*F*).

Con lo cual:

El foco se ubicará en las coordenadas (***p*, 0**), sustituyendo el punto coordenado en la fórmula de distancia entre dos puntos se obtiene lo siguiente:

$$wF = \sqrt{(x - \boldsymbol{p})^2 + (y - \boldsymbol{0})^2}$$

Pero como se explicó, ***wF*** por definición es igual a ***Dw***, por lo tanto $\boldsymbol{Dw = x + p}$

Igualando las distancias tenemos: $\boldsymbol{wF = Dw}$

$$\sqrt{(x - p)^2 + (y - 0)^2} = x + p$$

Elevando ambos miembros al cuadrado se elimina la raíz con la potencia.

$$\left(\sqrt{(x - p)^2 + (y - 0)^2}\right)^2 = (x + p)^2$$

Desarrollando los cuadrados:

$$(x^2 - 2px + p^2) + (y^2 - 0y + 0) = (x^2 + 2px + p^2)$$

Simplificando ambos miembros:

$$(\cancel{x^2} - 2px + \cancel{p^2}) + (y^2 - 0y + 0) = (\cancel{x^2} + 2px + \cancel{p^2})$$

$$-2px + y^2 = 2px$$

$$+y^2 = 2px + 2px$$

$$+y^2 = 4px$$

2.10 Parábolas con vértice en el origen

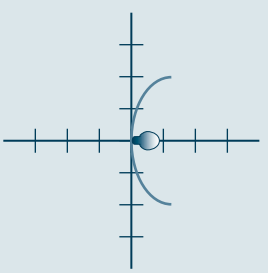
Las parábolas con vértice en el origen presentan una ecuación cuadrática que se orientará (abrirá) en proyección a su incógnita lineal; obsérvense las siguientes representaciones:

Alerta

Como el foco siempre se encontrará dentro de la parábola, ubicando al foco conoceremos la orientación de la parábola.

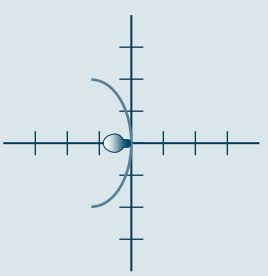
abre a la Derecha por ser positiva y proyectarse en *x*

$y^2 = 4px$



abre a la Izquierda por ser negativa y proyectarse en *x*

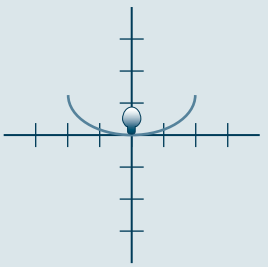
$y^2 = -4px$



(*continuación*)

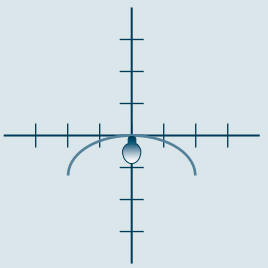
abre hacia Arriba por ser positiva y proyectarse en *y*

$x^2 = 4py$



abre hacia Abajo por ser negativa y proyectarse en *y*

$x^2 = -4py$



Una parábola con vértice en el origen (0, 0) como sabemos puede tener 4 orientaciones.

Para dar solución a una parábola en el origen se recomiendan los siguientes pasos:

Paso 1: Identificar datos (directriz, foco, ecuación, ancho focal)

Para construir una parábola con vértice en el origen se deben identificar cualquiera de esos datos ya que el vértice ya lo conocemos es de coordenada (0, 0) por ser en el origen.

Paso 2: Obtención del valor p parámetro

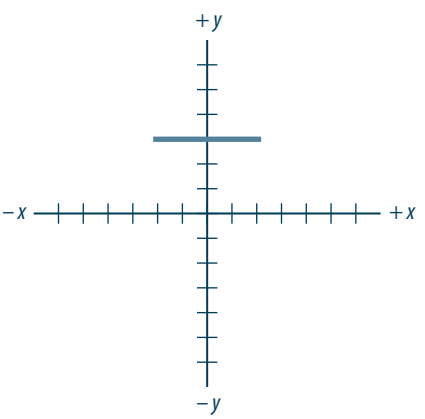
Como el vértice se ubica en el origen al identificar la directriz o el foco conoceremos el valor del parámetro, valor representado por 4*p*.

Paso 3: Obtención de la ecuación de la parábola y su gráfica

Al obtener la ecuación de la parábola, ubicamos la orientación de la misma y con ello podemos graficar.

Problema resuelto

Determina la ecuación de la parábola con base a la gráfica siguiente.



Respuesta

Con base en la gráfica y por ser de vértice en el origen puede concluirse lo siguiente:

- La parábola abre hacia abajo por ubicarse arriba la directriz. **(paso 1)**
- El valor del parámetro es **3** (distancia del vértice a la directriz) **(paso 2)**
- Su fórmula es $x^2 = -4py$ (fórmula de parábola de orientación hacia abajo) **(paso 3)**

Alerta

Cuando la directriz se encuentra arriba el foco se ubicará abajo, por tanto la parábola abre hacia abajo.

Alerta

Por ser una parábola de vértice en el origen, la distancia de la directriz al vértice será la misma que del vértice al foco; identificándose *p* parámetro.

Alerta

Parámetro distancia en unidades del Vértice al Foco o a la Directriz.

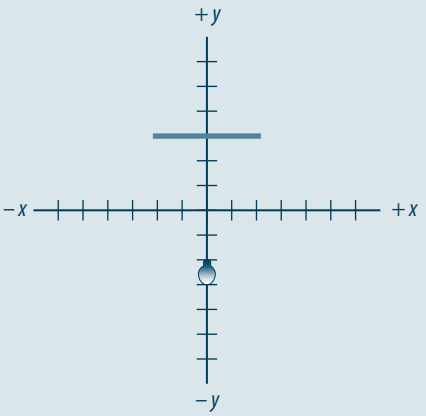
Alerta

Cuando el foco esté a la derecha la parábola abrirá hacia la derecha, por lo tanto la directriz la encontraremos a la izquierda.

Respuesta (*continuación*)

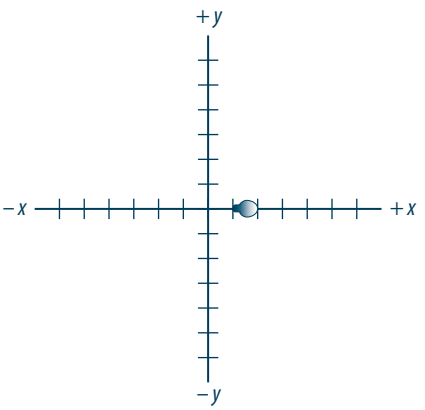
Como es de vértice en el origen (0, 0) y conocemos el valor del parámetro 3, distancia de la directriz al vértice, podemos deducir la ubicación del foco en (0, −3) a la misma distancia pero en sentido contrario.

$x^2 = -4py$
$x^2 = -4(3)y$
$x^2 = -12y$



Problema resuelto

Determina la ecuación de la parábola en base a la gráfica siguiente.



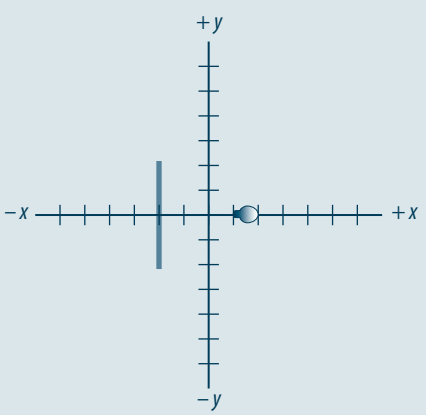
Respuesta

Con base en la gráfica y por ser de vértice en el origen puede concluirse lo siguiente:

- La parábola abre hacia la derecha por ubicarse el foco en ese sentido. **(paso 1)**
- Parámetro es **2** (distancia del vértice en el origen al foco) **(paso 2)**
- Su fórmula es $y^2 = 4px$ (fórmula de parábola de orientación derecha) **(paso 3)**

Como es de vértice en el origen (0, 0) y conocemos el valor del parámetro 2, distancia del vértice al foco, podemos deducir la ubicación de la directriz, ya que esta se ubicara a la misma distancia del vértice, pero en sentido contrario al foco.

$y^2 = 4px$
$y^2 = 4(2)x$
$y^2 = 8x$



Problema resuelto

Con base a la siguiente ecuación $y^2 = 8x$ grafica la parábola.

ALERTA: Por el puro planteamiento es difícil graficar:
- En esta ocasión desconocemos todo.
- Sólo sabemos que el vértice está en el origen.

Respuesta

Por ser de vértice en el origen y en base en la redacción, se concluye lo siguiente:

- La fórmula del problema es $y^2 = 4px$ identificada por ser positiva y tener proyección en x (fórmula de la parábola con orientación hacia la derecha).
- Al comparar la fórmula $y^2 = 4px$ con la ecuación $y^2 = 8x$ se identifica que $4p$ toma el valor de 8, por lo tanto al despejar se obtendrá el valor de ***p***.

$$4p = 8$$

$$p = \frac{8}{4}$$

$$p = 2$$

Con base en la informacion anterior puedo seguir los pasos de solución indicados y graficarla.

La fórmula

$y^2 = 4px$

Paso 1: Identificar datos; *por la fórmula $y^2 = 4px$ sabemos que abre a la derecha.*

Valor del parámetro

$p = 2$

Paso 2: Obtención del valor p; por el despeje $p = 2$.

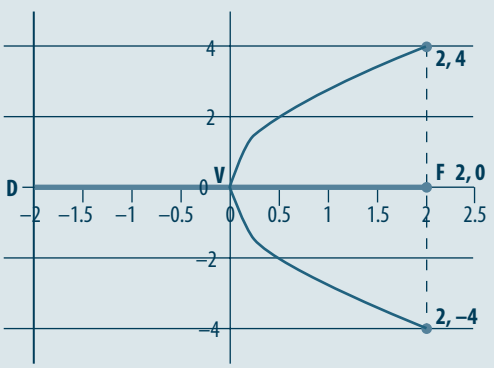
La ecuación:

$y^2 = 4px$

$y^2 = 4(2)x$

$y^2 = 8x$

Paso 3: Obtención de la ecuación de la parábola y su gráfica; *la parábola abre hacia la derecha y su gráfica es la siguiente:*



Es de vértice en el origen, su orientación es hacia la derecha y por su parámetro 2; ubicamos el foco en (2, 0), al sustituir el valor del parámetro en $4p$, obtenemos $4(2) = 8$, valor que debe dividirse en dos partes iguales, ubicándose cada una a la misma distancia a uno y otro extremo del foco formándose las coordenadas (2, 4) y (2, −4) puntos del ancho focal.

Alerta

Cuando la parábola es de vértice en el origen para resolverla o graficarla bastará con identificar un dato adicional al vértice.

Problema resuelto

Con base a la siguiente ecuación $y^2 = -6x$ grafica la parábola.

Respuesta

Por ser de vértice en el origen y por la ecuación se concluye lo siguiente:

- La fórmula del problema es $y^2 = -4px$ (fórmula de parábola de orientación izquierda).
- Al comparar la fórmula $y^2 = -4px$ con la ecuación $y^2 = -6x$ se identifica que $-4p$ toma el valor de -6, por lo tanto al despejar se obtendrá el valor de ***p***.

$$-4p = -6$$

$$p = \frac{-6}{-4}$$

$$p = +1.5$$

Con base en la informacion anterior puedo seguir los pasos de solución indicados y graficarla.

La fórmula

$y^2 = -4px$

Paso 1: Identificar datos; *por la fórmula $y^2 = -4px$ abre a la izquierda.*

Valor del parámetro

$p = 1.5$

Paso 2: Obtención del valor p; por el despeje $p = 1.5$.

La ecuación:

$y^2 = -4px$

$y^2 = -4(1.5)x$

$y^2 = -6x$

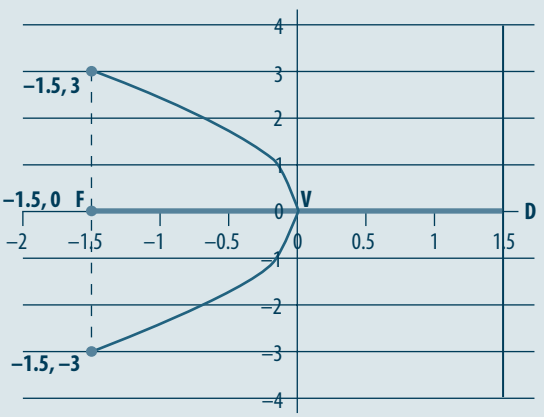
Paso 3: Obtención de la ecuación de la parábola y su gráfica; *la parábola abre hacia la izquierda y su gráfica es la siguiente:*

Al multiplicar el parámetro por cuatro se obtiene el ancho focal o amplitud de la parábola y para graficar su valor se divide en dos partes iguales.

tres unidades son hacia arriba

tres unidades son hacia abajo

de la coordenada del foco



Alerta

Recuerda el ancho focal se representa por una línea que muestra la misma distancia a uno y otro extremo del foco.

Problema resuelto

Con base a la siguiente ecuación $x^2 = 12y$ grafica la parábola.

Respuesta

Por ser de vértice en el origen y por la ecuación se concluye lo siguiente:

- La fórmula del problema es $x^2 = 4py$ (fórmula de parábola de orientación hacia arriba).
- Al comparar la fórmula $x^2 = 4py$ con la ecuación $x^2 = 12y$ se identifica que $4p$ toma el valor de 12, por lo que si despejamos $p = 3$

Respuesta (*continuación*)

Con base en la información anterior puedo seguir los pasos de solución indicados y graficarla.

La fórmula

$x^2 = 4py$

Paso 1: Identificar datos; *por la fórmula $x^2 = 4py$ abre hacia arriba.*

Valor del parámetro

$p = 3$

Paso 2: Obtención del valor p; por el despeje $p = 3$.

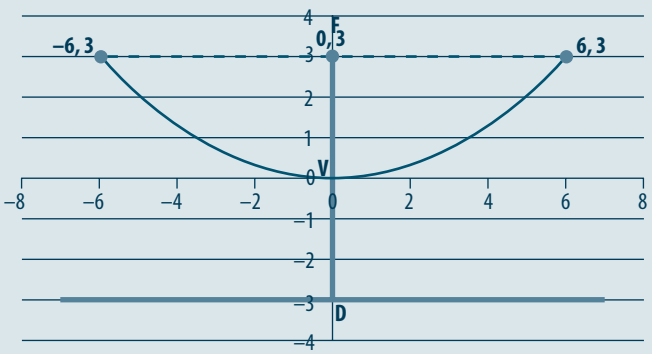
La ecuación:

$x^2 = 4py$

$x^2 = 4(3)y$

$x^2 = 12y$

Paso 3: Obtención de la ecuación de la parábola y su gráfica; *la parábola abre hacia arriba y su gráfica es la siguiente:*



Vértice (0, 0)

Parámetro 3

Foco a 3 unidades del vértice (0, 3)

Directriz a 3 unidades del vértice (0, −3)

Ancho Focal 12
(−6, 3) y (6, 3)

Al multiplicar el parámetro por cuatro se obtiene el ancho focal o amplitud de la parábola y por ser una figura simétrica serán:

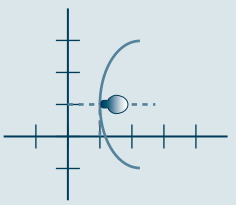
seis unidades a la izquierda ↖ coordenada del foco ↗ seis unidades a la derecha

2.11 Parábolas con vértice fuera del origen (*h*, *k*)

Hemos visto parábolas con vértice en el origen (0, 0), pero qué pasa cuando la parábola no se encuentra en el origen; es decir, se sitúa en un lugar cualquiera; un punto (h, k); generalmente, no cambia mucho, las fórmulas son un poco diferentes pero su solución es casi la misma, solo que a estas se les conoce como ecuación estándar o canónica de la parábola.

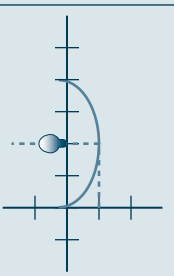
$(y - k)^2 = 4p(x - h)$

abre a la Derecha por ser positiva y proyectarse en x



$(y - k)^2 = -4p(x - h)$

abre a la Izquierda por ser negativa y proyectarse en x



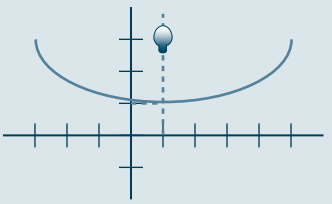
Alerta

Como el foco siempre se encontrará dentro de la parábola, ubicando al foco conoceremos la orientación de la parábola y por lo mismo podremos identificar su fórmula.

(*continuación*)

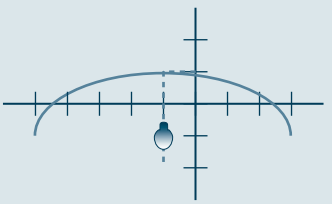
$(x-h)^2 = 4p(y-k)$

abre hacia Arriba por ser positiva y proyectarse en *y*



$(x-h)^2 = -4p(y-k)$

abre hacia Abajo por ser negativa y proyectarse en *y*



Las cuatro ecuaciones estándar o canónicas de la parábola son las siguientes:

Eje	Orientación	Ecuación	Directriz	Foco
x	Derecha	$(y-k)^2 = +4p(x-h)$	$x = h-p$	$[(h+p), k]$
	Izquierda	$(y-k)^2 = -4p(x-h)$	$x = h+p$	$[(h-p), k]$
y	Arriba	$(x-h)^2 = +4p(y-k)$	$y = k-p$	$[h, (k+p)]$
	Abajo	$(x-h)^2 = -4p(y-k)$	$y = k+p$	$[h, (k-p)]$

Ecuación general de la parábola: $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Presentándose dos formas dependiendo de si el eje focal es paralelo al eje *x* o al eje *y*.

parábola con eje focal paralelo al eje *x*

$Cy^2 + Ey + Dx + F = 0$

parábola con eje focal paralelo al eje *y*

$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$

A diferencia de una parábola con vértice en el origen donde el vértice siempre se ubicara en el punto de coordenada (0, 0), una parábola de vértice fuera del origen siempre estará en un punto de coordenada (*h*, *k*), recuerda que este es el punto medio entre la directriz y el foco, por lo que ubicándolo, los demás se obtendrán en forma similar al tema en el origen.

Para dar solución a una parábola con vértice fuera del origen se recomiendan los siguientes pasos:

Paso 1: Identificar por lo menos dos datos (directriz, foco, ecuación, ancho focal)

Para construir una parábola con vértice fuera del origen se deben identificar dos datos ya que en esta ocasión el vértice no es de coordenada (0, 0) es de coordenada (*h*, *k*).

Paso 2: Obtención del valor p parámetro

Al ubicar el vértice fuera del origen e identificar a la directriz o el foco conoceremos el valor del parámetro, la distancia en unidades de uno a otro, su valor sigue siendo $4p$.

Paso 3: Obtención de la ecuación estándar o de vértice (h, k) para graficar

Al obtener la ecuación de la parábola, ubicamos su orientación y podemos graficar.

Problema resuelto

Obtener la ecuación estándar de la parábola si la intersección de la directriz con el eje focal se ubica en (1, 1) y su vértice es de coordenada (1, 2).

Respuesta

Por ser de vértice fuera del origen, ubicaremos primero al vértice, utilizando el otro punto (Foco o Directriz) como indicador de orientación; es decir, hacia donde abre la parábola.

- Como el vértice es (1, 2) y la directriz es (1, 1) la parábola abre hacia arriba, su fórmula $(x - h)^2 = 4p(y - k)$, por la distancia entre uno y otro su $p = 1$

Con base en la informacion anterior puedo dar solución.

Vértice (1, 2)

Directriz (1, 1)

Paso 1: Identificar por lo menos dos datos; *aquí identificamos vértice y directriz.*

Valor del parámetro

$p = 1$

Paso 2: Obtención del valor *p*; *por la distancia entre los puntos su valor es 1*

La ecuación:

$(x - h)^2 = 4p(y - k)$

Paso 3: Obtención de la ecuación estándar para graficar.

$(x - [1])^2 = 4(1)(y - [2])$ — vértice

parámetro

$(x - 1)^2 = 4(y - 2)$

ancho focal

Otra forma de calcular los puntos coordenados es utilizando las fórmulas de la página anterior.

Foco	Directriz
$[h, (k + p)]$	$y = k - p$
$[1, (2 + 1)]$	$y = 2 - 1$
$[1, 3]$	$y = 1$

Problema resuelto

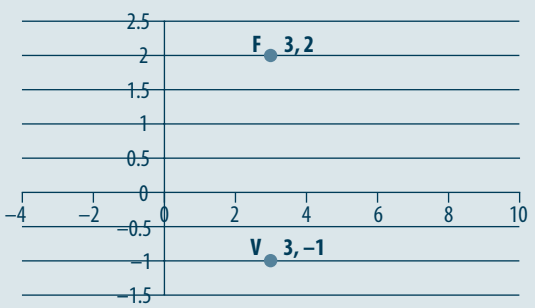
Obtener la ecuación estándar de la parábola y graficarla si su foco se ubica en (3, 2) y su vértice es de coordenada (3, −1).

Respuesta

Por ser de vértice fuera del origen, ubicaremos primero al vértice, utilizando el otro punto (Foco o Directriz) como indicador de orientación; es decir, hacia donde abre la parábola.

Recomendamos graficar la información presentada, para que sea más fácil identificar la orientación de la parábola:

- Como el foco está hacia arriba la parábola abrirá hacia arriba su fórmula $(x - h)^2 = 4p(y - k)$, por la distancia entre un punto y otro su $p = 3$



Alerta

Cuando la parábola sea de vértice fuera del origen para resolverla o graficarla será necesario identificar por lo menos dos datos.

Respuesta (*continuación*)

Con base en la información anterior puedo seguir los pasos de solución indicados y graficar.

Vértice (3, −1)

Foco (3, 2)

Paso 1: Identificar por lo menos dos datos; aquí identificamos vértice y foco.

Valor del parámetro

$p = 3$

Paso 2: Obtención del valor *p*; por la distancia entre los puntos su valor es 3.

La ecuación:

$(x - h)^2 = 4p(y - k)$

Paso 3: Obtención de la ecuación estándar y su gráfica.

vértice

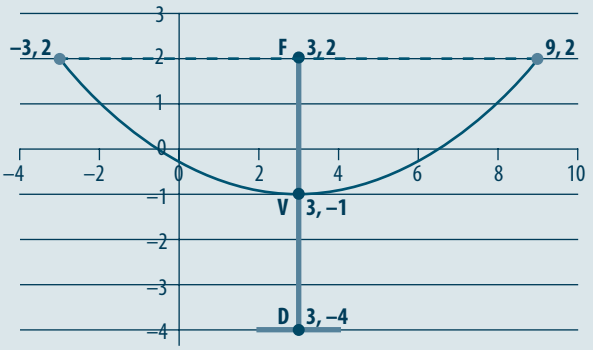
$(x - [3])^2 = 4(3)(y - [-1])$

parámetro

ancho focal

$(x - 3)^2 = 12(y + 1)$

Ecuación estándar de la parábola

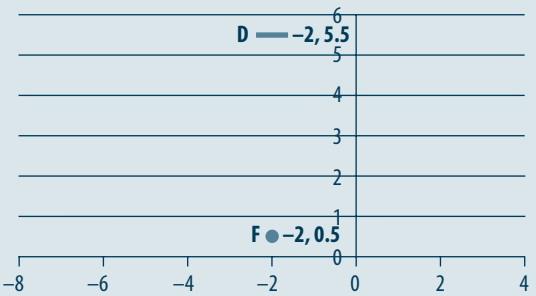


Problema resuelto

Obtener la ecuación estándar de la parábola y grafícarla si se ubica su foco en la coordenada (−2, 0.5) y a la intersección de la directriz con el eje focal en (−2, 5.5).

Respuesta

Al hacer la gráfica observamos:



- Como la directriz está arriba y el foco abajo, la parábola abrirá hacia abajo, su fórmula $(x - h)^2 = -4p(y - k)$, como el vértice se ubica a la mitad entre la directriz y el foco la coordenada del vértice es (−2, 3) y el valor del parámetro $p = 2.5$

Con base en la información anterior puedo seguir los pasos de solución indicados y graficar.

Directriz (−2, 5.5)

Foco (−2, 0.5)

Paso 1: Identificar por lo menos dos datos; aquí identificamos la intersección de la directriz con el eje focal y la coordenada del foco.

Respuesta (*continuación*)

Valor del parámetro

$p = 2.5$

Paso 2: Obtención del valor p; por la distancia entre los puntos su valor es 2.5

La ecuación:

$(x - h)^2 = -4p(y - k)$

Paso 3: Obtención de la ecuación estándar y su gráfica.

vértice

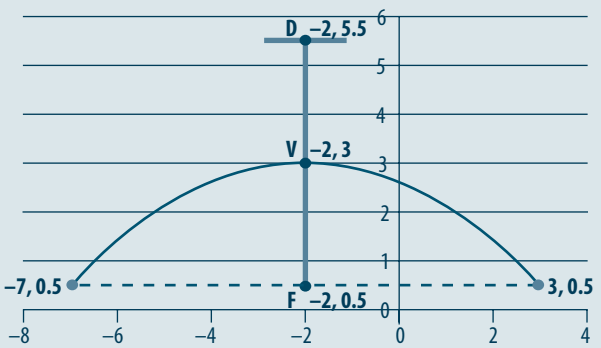
$(x - [-2])^2 = -4(2.5)(y - [3])$

parámetro

ancho focal

$(x + 2)^2 = -10(y - 3)$

Ecuación estándar de la parábola



Recuerda que otra forma de calcular los puntos coordenados es utilizando las fórmulas.

Foco $[h, (k - p)]$
$[-2, (3 - 2.5)]$
$[-2, 0.5]$

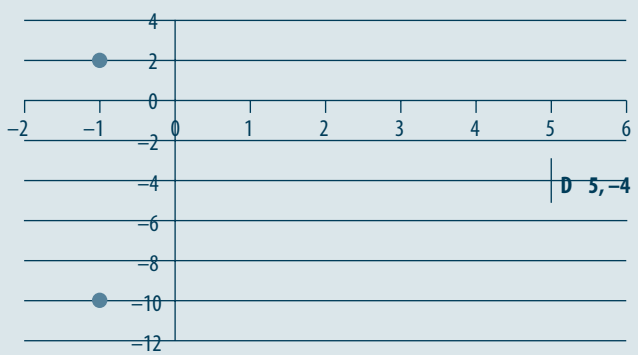
Directriz $y = k + p$
$3 + 2.5$
5.5

Problema resuelto

Obtener la ecuación estándar de la parábola y graficarla si se ubica la intersección de la directriz con el eje focal en (5, −4) y como puntos del lado recto (−1, 2) y (−1, −10).

Respuesta

Al graficar observamos lo siguiente:



- Como la directriz se ubica a la derecha y el lado recto se relaciona con el foco la parábola abrirá hacia la izquierda, su fórmula $\mathbf{(y - k)^2 = -4p(x - h)}$, como la distancia entre la directriz y el lado recto es de 6, a la mitad ubicaremos el vértice, su coordenada (2, −4) y el valor del parámetro $p = 3$

Respuesta (*continuación*)

Con base en la información anterior puedo seguir los pasos de solución indicados y graficar.

Directriz (5, −4)

Ancho Focal
(−1, 2) y (−1, −10)

Paso 1: Identificar por lo menos dos datos; aquí identificamos la intersección de la directriz con el eje focal y a los puntos extremos del lado recto o ancho focal.

Valor del parámetro

$p = 3$

Paso 2: Obtención del valor *p*; por la distancia entre los puntos su valor es 3.

La ecuación:

$(y - k)^2 = -4p(x - h)$

Paso 3: Obtención de la ecuación estándar y su gráfica.

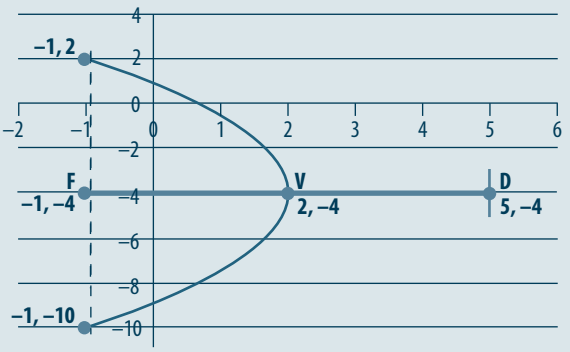
Recuerda que los puntos coordenados son (*x*, *y*) y en este ejercicio el vértice lo representa el valor de $\begin{matrix}(x,\ y)\\(2,-4)\end{matrix}$ por lo que al introducirlo en la fórmula los valores se colocarán de acuerdo a la incógnita.

$(y - k)^2 = -4p(x - h)$ — vértice

$(y - [-4])^2 = -4(3)(x - [2])$ — parámetro, ancho focal

$(y + 4)^2 = -12(x - 2)$

Ecuación estándar de la parábola

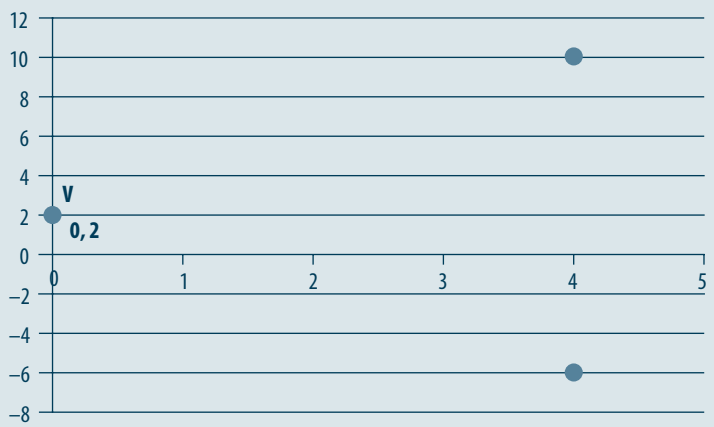


Problema resuelto

Obtener la ecuación estándar de la parábola y graficarla si se ubica al vértice en el punto de coordenada (0, 2) y como puntos extremos del lado recto (4, 10) y (4, −6).

Respuesta

Al graficar observamos lo siguiente:



Respuesta (*continuación*)

- Como el ancho focal es igual a $4p$ y son 16 unidades, por lo tanto $16/4 = 4$, el valor del parámetro, como ya conozco el valor de $p = 4$, puedo calcular su foco que se ubicará en la coordenada (4, 2) y la directriz en (−4, 2), por el foco se que abre a la derecha su fórmula es $\mathbf{(y - k)^2 = 4p(x - h)}$.

Con base en la información anterior puedo seguir los pasos de solución indicados y graficar.

Vértice (0, 2))

Ancho Focal
(4, 10) y (4, −6)

Paso 1: Identificar por lo menos dos datos; identificamos foco y a los puntos extremos del lado recto o ancho focal.

Valor del parámetro

$p = 4$

Paso 2: Obtención del valor p; por la distancia entre los puntos su valor es 4.

La ecuación:

$(y - k)^2 = 4p(x - h)$

Paso 3: Obtención de la ecuación estándar y su gráfica.

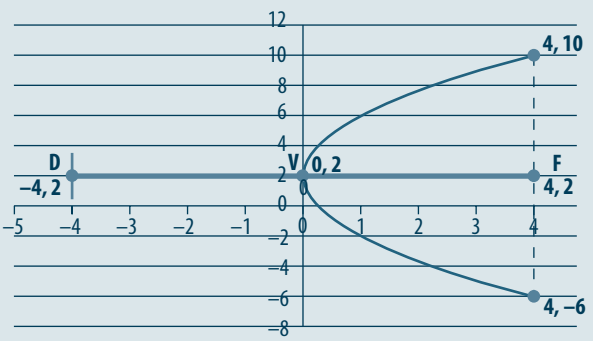
Recuerda que los puntos coordenados son (x, y) y en este ejercicio el vértice lo representa el valor de $\begin{matrix}(x,\ y)\\(0,\ 2)\end{matrix}$ por lo que al introducirlo en la fórmula los valores se colocarán de acuerdo a la incógnita.

$(y - k)^2 = 4p(x - h)$ — vértice

$(y - [2])^2 = 4(4)(x - [0])$ — parámetro, ancho focal

$(y - 2)^2 = 16(x - 0)$

Ecuación estándar de la parábola



2.12 Ecuación general de la parábola

Como se indicó la parábola en su forma general puede presentar dos formas que estarán igualadas a cero, relacionándose con el eje de las abscisas o las ordenadas.

parábola con eje focal paralelo al eje x

$Cy^2 + Ey + Dx + F = 0$

parábola con eje focal paralelo al eje y

$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$

Obtención de la ecuación general partiendo de su forma estándar o canónica

La forma estándar o canónica como hemos observado presenta dos términos igualados entre sí uno de ellos cuadrático y el otro lineal, razón por lo cual para obtenerla en su forma general se deben resolver los productos igualándose a cero.

Para dar solución se recomiendan los siguientes pasos:

Paso 1: Desarrollar los productos de la ecuación

Esta ecuación siempre presentará dos operaciones:

Lado izquierdo de la igualdad (la multiplicación del binomio al cuadrado) = Lado derecho de la igualdad (la multiplicación del término lineal)

Paso 2: Igualar la ecuación a cero

Después de desarrollar los productos igualamos a cero.

Utilizaremos las ecuaciones estándar de los ejercicios anteriores para obtener su forma general.

Problema resuelto

Obtener la ecuación general de la parábola si su ecuación estándar es $(x-3)^2 = 12(y+1)$.

Respuesta

Para obtener la ecuación general se resuelven ambos lados de la igualdad y se iguala a cero.

Aquí hay un binomio al cuadrado

Aquí una multiplicación

$$(x-3)^2 = 12(y+1)$$

$$x^2 - 6x + 9 = 12y + 12$$

Paso 1: Desarrollar los productos de la ecuación; *se resuelve el binomio (lado izquierdo) y el producto (lado derecho).*

$$x^2 - 6x + 9 - 12y - 12 = 0$$

$$x^2 - 6x - 12y - 3 = 0$$

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Paso 2: Igualar la ecuación a cero; *después de resolver ambos productos se iguala toda la expresión a cero dándole la presentación en su forma general.*

Alerta

Para obtener la ecuación general de la parábola se resuelven los productos y se iguala a cero.

Alerta

Representación de la forma general de la parábola.

Problema resuelto

Obtener la ecuación general de la parábola si su ecuación estándar es $(x+2)^2 = -10(y-3)$.

Respuesta

$$(x+2)^2 = -10(y-3)$$

$$x^2 + 4x + 4 = -10y + 30$$

Paso 1: Desarrollar los productos de la ecuación; *se resuelve el binomio (lado izquierdo) y el producto (lado derecho).*

$$x^2 + 4x + 4 + 10y - 30 = 0$$

$$x^2 + 4x + 10y - 26 = 0$$

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Paso 2: Igualar la ecuación a cero; *después de resolver ambos productos se iguala toda la expresión a cero dándole la presentación en su forma general.*

Problema resuelto

Obtener la ecuación general de la parábola si su ecuación estándar es $(y + 4)^2 = -12(x - 2)$.

Respuesta

$$(y + 4)^2 = -12(x - 2)$$
$$y^2 + 8y + 16 = -12x + 24$$
$$y^2 + 8y + 16 + 12x - 24 = 0$$
$$y^2 + 8y + 12x - 8 = 0$$
$$Cy^2 + Ey + Dx + F = 0$$

Paso 1: Desarrollar los productos de la ecuación; *se resuelve el binomio (lado izquierdo) y el producto (lado derecho).*

Paso 2: Igualar la ecuación a cero; *después de resolver ambos productos se iguala toda la expresión a cero dándole la presentación en su forma general.*

Alerta

Fórmula general de la parábola.

Problema resuelto

Obtener la ecuación general de la parábola si su ecuación estándar es $(y - 2)^2 = 16(x - 0)$.

Respuesta

$$(y - 2)^2 = 16(x - 0)$$
$$y^2 - 4y + 4 = 16x$$
$$y^2 - 4y + 4 - 16x = 0$$
$$Cy^2 + Ey + Dx + F = 0$$

Paso 1: Desarrollar los productos de la ecuación; *se resuelve el binomio (lado izquierdo) y el producto (lado derecho).*

Paso 2: Igualar la ecuación a cero; *después de resolver ambos productos se iguala toda la expresión a cero dándole la presentación en su forma general.*

2.13 Obtención de la ecuación estándar partiendo de su forma general

Así como se obtuvo la ecuación general partiendo de su forma estándar o canónica es posible invertir el proceso a partir de la forma general $\boldsymbol{Ax^2 + Dx + Ey + F = 0}$, obtener una ecuación estándar $\boldsymbol{(x - h)^2 = 4p(y - k)}$ para hacerlo se proponen los siguientes pasos.

Paso 1: Separación de términos (la presentación de la fórmula)

La variable representativa del término al cuadrado se ubicará en forma descendente a la izquierda de la igualdad y la otra variable a la derecha para dar la presentación de la fórmula.

Paso 2: Identificación del término lineal

A la izquierda de la igualdad y en segunda posición se ubicará el término lineal valor con incógnita o elevado a la uno.

Paso 3: Completando el trinomio cuadrado perfecto

Al identificar a la izquierda de la igualdad el término lineal, su coeficiente numérico con todo y signo se divide entre dos y su resultado se eleva al cuadrado, esto es completando el trinomio cuadrado perfecto; y para no alterar la ecuación, el valor que completa, también debe agregarse al otro lado de la igualdad.

Paso 4: La factorización

$$\left(\text{Raíz del término cuadrático} \quad \text{Uniéndose con el signo del segundo término} \quad \text{Raíz del término independiete}\right)^2 = \text{La separación del coeficiente numérico de la literal y el paréntesis para simplificar}$$

Problema resuelto

Obtener la ecuación estándar de la parábola de la ecuación general $x^2 + 4x + 10y - 26 = 0$

Respuesta

$x^2 + 4x + 10y - 26 = 0$

Izquierda
Término cuadrático

Derecha
La otra variable

$$x^2 + 4x = -10y + 26$$

Término Lineal

$$x^2 + 4x \_\_\_\_\_ = -10y + 26$$

$$x^2 + 4x + 4 = -10y + 26 + 4$$

$$x^2 + 4x + 4 = -10y + 30$$

$$(x + 2)^2 = -10(y - 3)$$

Paso 1: Separación de términos; *la variable elevada al cuadrado a la izquierda y a la derecha la variable de exponente uno.*

Paso 2: Identificación del término lineal; *en este caso 4x.*

Paso 3: Completando el trinomio cuadrado perfecto; *el valor de 4 se divide entre dos y su resultado se eleva al cuadrado agregándose lo obtenido a ambos lados de la igualdad.*

Paso 4: La factorización.

La ecuación estándar; véase la página 66.

La ecuación estándar es $(x + 2)^2 = -10(y - 3)$

Donde se concluye:

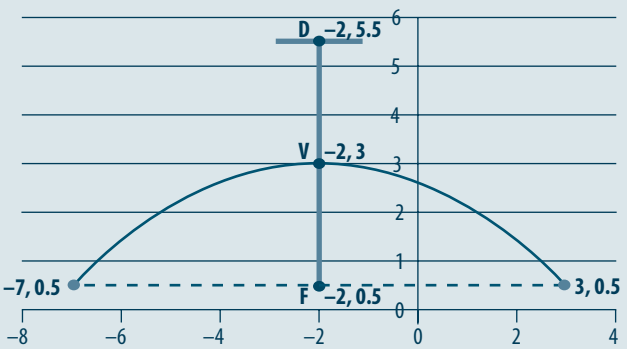
El ancho focal es: 10

El parámetro es: $\frac{10}{4} = 2.5$ y por el signo negativo sabemos que abre hacia abajo a *y* negativa.

Por la ecuación sabemos que su fórmula es: $(x - h)^2 = -4p(y - k)$ sustituyéndola tenemos:

$$(x - [2])^2 = -4[2.5](y - [-3])$$

Con lo cual el vértice es: $(-2, +3)$



Coordenada del foco

cinco unidades a la izquierda

cinco unidades a la derecha

Recuerda otra forma de calcular los puntos coordenados es utilizando fórmulas.

Foco $[h, (k - p)]$
$[-2, (3 - 2.5)]$
$[-2, 0.5]$

Directriz $y = k + p$
$3 + 2.5$
5.5

Este procedimiento es utilizado para la obtención de máximos y mínimos.

2.14 Obtención de máximos y mínimos, aplicaciones de la parábola

Si se considera al vértice como el punto mínimo o máximo que una función puede presentar, las aplicaciones de la parábola tendrán dos orientaciones:

Cóncava hacia abajo	En obtención a un máximo; el ingreso o la utilidad.
Cóncava hacia arriba	En obtención a un mínimo; el costo.

Buscándose estos puntos cuando en la redacción del problema se indique obtener el máximo o el mínimo de la siguiente función.

Problema resuelto

Hallar el ingreso máximo que se espera en base a la siguiente función $I = -x^2 + 46x$

Respuesta

$$I = -x^2 + 46x$$

Paso 1: Separación de términos; *la variable elevada al cuadrado a la izquierda y a la derecha la otra variable, aquí el cambio buscamos Ingreso.*

$$x^2 - 46x = -I$$

Término Lineal

Paso 2: Identificación del término lineal; *en este caso* $-46x$.

$$x^2 - 46x \_\_\_\_ = -I$$

Paso 3: Completando el trinomio cuadrado perfecto; $\left(\frac{-46}{2}\right) = (-23)^2 = 529$

$$x^2 - 46x + 529 = -I + 529$$

$$(x - 23)^2 = -1(I - 529)$$

Paso 4: La factorización; al factorizar se obtiene la solución que indica 23 unidades a un ingreso máximo de $529.00.

La ecuación estándar es $(x - 23)^2 = -1(I - 529)$

Donde se concluye:

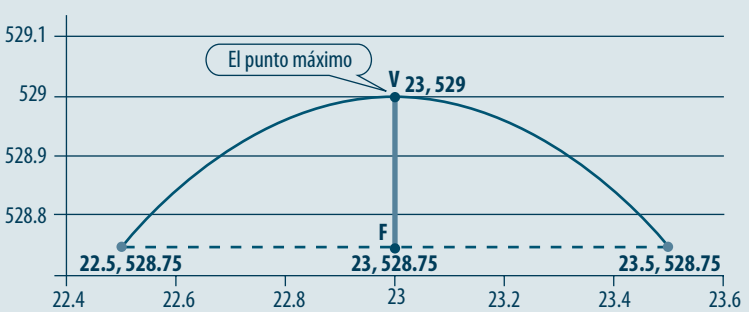
El ancho focal es: 1

El parámetro es: $\frac{1}{4} = 0.25$ y por el signo negativo sabemos que abre hacia abajo a *y* negativa.

Por la ecuación sabemos que su fórmula es: $\boldsymbol{(x - h)^2 = -4p(y - k)}$ sustituyéndola tenemos:

$$(x - [-23])^2 = -4[0.25](I - [-529])$$

Con lo cual el vértice es: (23, 529)



23 unidades a un ingreso máximo de $529.00

Problema resuelto

Hallar el costo mínimo esperado, si presenta la siguiente función $C = 0.6x^2 - 18x + 150$

Respuesta

$$C = 0.6x^2 - 18x + 150$$

$$-0.6x^2 + 18x = -C + 150$$

El término cuadrático tiene -0.6 para quitárselo dividimos toda la ecuación entre ese valor con todo y signo.

$$\frac{-0.6x^2 + 18x = -C + 150}{-0.6}$$

$$x^2 - 30x = \frac{1}{0.6}C - 250$$

Término Lineal

$$x^2 - 30x \_\_\_\_ = \frac{1}{0.6}C - 250$$

$$x^2 - 30x + 225 = \frac{1}{0.6}C - 250 + 225$$

$$x^2 - 30x + 225 = 1.6666667C - 25$$

$$(x - 15)^2 = 1.6666667(C - 15)$$

Paso 1: Separación de términos; *la variable elevada al cuadrado a la izquierda y a la derecha la otra variable, aquí la otra variable es C; el costo pero al cambiar de lado de igualdad cambia de signo.*

Paso 2: Identificación del término lineal; *aquí sería* $+18$, *pero al presentar el término cuadrático un coeficiente numérico, la ecuación cambiará, por ello* $\left(\frac{+18}{-0.6}\right)$ *el término dependiente es* -30

Paso 3: Completando el trinomio cuadrado perfecto;

El *valor de −30 se divide entre dos y su resultado se eleva al cuadrado*

$\left(\frac{-30}{2}\right) = [-15]^2 = 225$ *agregándose a ambos lados de la igualdad para no alterar la ecuación.*

Paso 4: La factorización:

Lado izquierdo

Raíz del término cuadrático,

Raíz del término independiente,

Uniéndolos con el signo del segundo, todo al cuadrado.

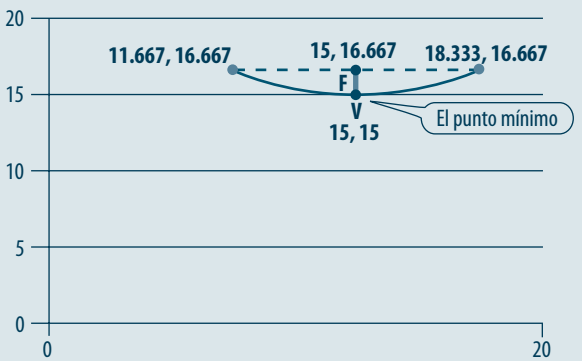
Lado derecho

Se retira el coeficiente numérico de la literal, su valor representa el ancho focal, se coloca un paréntesis y se hace la simplificación.

Por la ecuación sabemos que su fórmula es: $(x - h)^2 = +4p(y - k)$ sustituyéndola tenemos:

$$(x - [-15])^2 = +4[0.416666666](C - [-15])$$

Con lo cual el vértice es: (15, 15)



El problema se interpreta así: **15 artículos a un costo mínimo de $15.00**

Problema resuelto

Obtener la utilidad máxima de la empresa, si se presentan las siguientes funciones $I = -x^2 + 46x$

$C = 0.6x^2 - 18x + 150$

Respuesta

$U = I - C$

$U = -x^2 + 46x - [0.6x^2 - 18x + 150]$

$U = -x^2 + 46x - 0.6x^2 + 18x - 150]$

$U = -1.6x^2 + 64x - 150$ ← Es la ecuación requerida

Como pide utilidad primero debo integrar la fórmula y sabemos que $U = I - [C]$

$+1.6x^2 - 64x = -U - 150$

El término cuadrático tiene +1.6 para quitárselo dividimos todo entre ese valor.

Paso 1: Separación de términos; *la variable elevada al cuadrado a la izquierda y a la derecha la otra variable, aquí la otra variable es U; la utilidad y como cambia de lado de igualdad cambiará de signo.*

$$\frac{+1.6x^2 - 64x = -U - 150}{1.6}$$

Paso 2: Identificación del término lineal; aquí es $\left(\frac{-64}{1.6}\right)$ su valor -40

$x^2 - 40x = -0.625U - 93.75$

Término Lineal

$x^2 - 40x + 400 = -0.625U - 93.75 + 400$

Paso 3: Completando el trinomio cuadrado perfecto;

El valor de −40 se divide entre dos y su resultado se eleva al cuadrado

$\left(\frac{-40}{2}\right) = [-20]^2 = 400$ *agregándose a ambos lados de la igualdad para no alterar la ecuación.*

$x^2 - 40x + 400 = -0.625U + 306.25$

$(x - 20)^2 = -0.625(U - 490)$

Paso 4: La factorización;

Lado izquierdo	Lado derecho
Raíz del término cuadrático, Raíz del término independiente, Uniéndolos con el signo del segundo, todo al cuadrado.	Se retira el coeficiente numérico de la literal, su valor representa el ancho focal, se coloca un paréntesis y se hace la simplificación.

Al factorizar la expresión se obtiene: la forma estándar o canónica de la parábola.

El problema se interpreta así: **con 20 artículos se obtiene una utilidad máxima de $490.00**

Problema resuelto

Obtener la máxima utilidad de una empresa, si presenta costos fijos de $1 200.00 y costos variables de $20.00 por unidad, además de la función $I = -0.01x^2 + 40x + 24\,000$

Respuesta

$$U = I - C$$

$$U = -0.01x^2 + 40x + 24\,000 - [20x + 1\,200]$$

$$U = -0.01x^2 + 40x + 24\,000 - 20x - 1\,200$$

$$U = -0.01x^2 + 20x + 22\,800$$

Como pide utilidad primero debo integrar la fórmula y sabemos que $U = I - [C]$

Es la ecuación requerida

$$0.01x^2 - 20x = -U + 22\,800$$

El término cuadrático tiene +0.01 para quitárselo dividimos todo entre ese valor.

Paso 1: Separación de términos; *la variable elevada al cuadrado a la izquierda y a la derecha U la otra variable.*

$$\frac{0.01x^2 - 20x = -U + 22800}{0.01}$$

$$x^2 - 2\,000x = -100U + 2\,280\,000$$

Término Lineal

Paso 2: Identificación del término lineal;

aquí es $\left(\frac{-20}{0.01}\right)$ su valor $-2\,000$

$$x^2 - 2\,000x + 1\,000\,000 = -100U + 2\,280\,000 + 1\,000\,000$$

Paso 3: Completando el trinomio cuadrado perfecto;

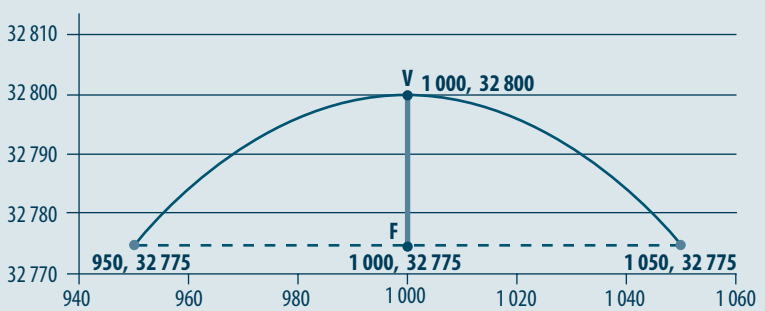
$$\left(\frac{-2000}{2}\right) = [-1000]^2 = 1000000$$

$$x^2 - 2\,000x + 1\,000\,000 = -100U + 3\,280\,000$$

$$(x - 1\,000)^2 = -100(U - 32\,800)$$

Paso 4: La factorización.

La máxima utilidad se obtiene con 1 000 unidades y $32 800.00



Problema resuelto

En una tienda de regalos el supervisor ha observado que cuando el precio de un producto es de $20.00, los clientes compran 200 productos, pero cuando el precio se duplica compran solo 120 productos.

En base a sus ventas el supervisor se pregunta. ¿Cuál podrá ser su máximo ingreso?

Respuesta

ALERTA: En el planteamiento no se ubica un dato de ingreso, lo que se observa es un problema de recta de dos puntos, relacionando unidades con precio y el ingreso es: $I = Px$.

Dando solución al problema de recta tenemos:

(x, y) ← **Paso 1:** Identificación de los datos.

(unidades, precio) ← **Paso 2:** Tipificar variables.

(200, 20)
(120, 40) } Datos ← **Paso 3:** Integración y cálculo de los puntos coordenados.

La aplicación de los datos en la fórmula y la resolución del problema.

Fórmula de los dos puntos:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 20 = \frac{40 - 20}{120 - 200}(x - 200)$$

$$y - 20 = \frac{20}{-80}(x - 200)$$

$$y - 20 = -0.25(x - 200)$$

$$y - 20 = -0.25x + 50$$

$$y = -0.25x + 50 + 20$$

$$y = -0.25x + 70$$

Al resolver el problema observamos que y es tipificada como P el precio; por lo tanto la ecuación sería $P = -0.25x + 70$ por lo que al multiplicarla por x las unidades se obtendrá la fórmula del ingreso.

La fórmula del ingreso es:

$P = -0.25x + 70$ ← Aquí se tiene ***p***, por lo que si deseamos I debemos multiplicar a toda la ecuación por x; obteniéndose $I = px$

$I = Px$

$I = (-0.25x + 70)x$

$I = -0.25x^2 + 70x$

$+0.25x^2 - 70x = -I$

Paso 1: Separación de términos; *la variable elevada al cuadrado a la izquierda y a la derecha la otra variable, aquí la otra variable es I; el ingreso.*

Respuesta (*continuación*)

$$\frac{+0.25x^2 - 70x = -I}{0.25}$$

$$x^2 - 280x = -4I$$

Término Lineal

$$x^2 - 280x \_\_\_\_\_ = -4I$$

Paso 2: Identificación del término lineal; aquí el término es –280

$$x^2 - 280x + 19\,600 = -4I + 19\,600$$

$$(x - 140)^2 = -4(I - 4\,900)$$

Paso 3: Completando el trinomio cuadrado perfecto;

El *valor de −280 se divide entre dos y su resultado se eleva al cuadrado*

$\left(\frac{-280}{2}\right) = [-140]^2 = 19\,600$ *agregándose a ambos lados de la igualdad para no alterar la ecuación.*

Paso 4: La factorización:

Lado izquierdo

Raíz del término cuadrático,

Raíz del término independiente,

Uniéndolos con el signo del segundo, todo al cuadrado.

Lado derecho

Se retira el coeficiente numérico de la literal, colocando un paréntesis para simplificar, dentro de él, se presenta la literal y el valor de la operación.

El problema brinda la siguiente interpretación: **con 140 productos vendidos se ve maximizado el ingreso en $4 900.00, obteniéndose que el precio máximo que los clientes están dispuestos a pagar es de $35.00**

Problema resuelto

Una empresa desea conocer el ingreso máximo que se puede obtener y para ello presenta la siguiente ecuación de demanda $p = \frac{-0.04x + 28}{4}$ donde p es el precio y x las unidades obtenidas a ese precio.

Respuesta

$$p = \frac{-0.04x + 28}{4}$$

La ecuación no es de ingreso, por ello primero debemos obtener la ecuación correspondiente y como sabemos la fórmula del ingreso es $I = px$.

$$I = \left(\frac{-0.04x + 28}{4}\right)x$$

Aquí se tiene ***p***, por lo que si deseamos I debemos multiplicar a toda la ecuación por x; obteniéndose $I = px$.

$$I = \frac{-0.04x^2 + 28x}{4}$$

$$I = -0.01x^2 + 7x$$

Es la ecuación requerida.

Respuesta (*continuación*)

$0.01x^2 - 7x = -I$

Paso 1: Separación de términos; *la variable elevada al cuadrado a la izquierda y a la derecha la otra variable; I.*

$\frac{0.01x^2 - 7x = -I}{0.01}$

Como el término cuadrático presenta coeficiente numérico para quitarlo dividimos todo la expresión entre ese valor.

$x^2 - 700x = -100I$

Término Lineal

Paso 2: Identificación del término lineal; aquí su valor es −700.

Paso 3: Completando el trinomio cuadrado perfecto;

El *valor de −700 se divide entre dos y su resultado se eleva al cuadrado*

$\left(\frac{-700}{2}\right) = [-350]^2 = 122\,500$ *agregándose a ambos lados de la igualdad para no alterar la ecuación.*

$x^2 - 700x + 122\,500 = -100I + 122\,500$

$(x - 350)^2 = -100(I - 1\,225)$

Paso 4: La factorización.

350 unidades representaran un ingreso máximo de $1 225.00

Problema resuelto

Halla la utilidad máxima de producción esperada por una empresa, si presenta la siguiente función $U = -4x^2 + 16x$

Respuesta

$U = -4x^2 + 16x$

$4x^2 - 16x = -U$

Paso 1: Separación de términos; *la variable elevada al cuadrado a la izquierda y a la derecha la otra variable, aquí la otra variable es U; la utilidad, pero como cambia de lado de igualdad cambia de signo.*

El término cuadrático presenta 4 para quitárselo dividimos todo entre ese valor.

$\frac{4x^2 - 16x = -U}{4}$

$x^2 - 4x = -\frac{1}{4}U$

Término Lineal

Paso 2: Identificación del término lineal; aquí es $\left(\frac{-16}{4}\right)$ su valor −4 el término lineal del ejercicio.

Respuesta (*continuación*)

$$x^2 - 4x + 4 = -\frac{1}{4}U + 4$$

$$(x-2)^2 = -\frac{1}{4}(U - 16)$$

Paso 3: Completando el trinomio cuadrado perfecto;

El *valor de −4 se divide entre dos y su resultado se eleva al cuadrado*

$\left(\frac{-4}{2}\right) = [-2]^2 = 4$ *agregándose a ambos lados de la igualdad para no alterar la ecuación.*

Paso 4: Factorización y simplificación:

Lado izquierdo	Lado derecho
Raíz del término cuadrático, Raíz del término independiente Uniéndolos con el signo del segundo, todo al cuadrado.	Se retira el coeficiente numérico de la literal, colocando un paréntesis para simplificar, dentro de él, se presenta la literal y el valor de la operación.

Al factorizar la expresión se obtiene: la forma canónica de la parábola.

El problema se interpreta así: **2 artículos ofrecen una utilidad máxima de $16.00**

En ocasiones no es una la ecuación a dar solución, sino dos las ecuaciones a resolverse, un planteamiento de sistema de ecuaciones pero con término cuadrático; generando en su solución dos curvas que al cruzarse indicarán el punto coordenado de resultado.

2.15 Punto de equilibrio en el mercado

El punto de equilibrio en el mercado se logra cuando a la oferta generada le corresponde una demanda aceptada; es decir, los ingresos de los productos se igualan con los costos de los bienes.

Para dar solución se recomiendan los siguientes pasos:

Paso 1: Identificación de cada ecuación

Para poder identificar si una ecuación es oferta o demanda bastará con ubicar el signo del coeficiente numérico de incógnita, en caso de ser positivo será oferta, en caso contrario será demanda.

Como el signo del coeficiente numérico de la incógnita cuadrática es positivo, esta es una ecuación de Oferta.

$y = +x^2 + 4x + 2$

$y = -3x^2 + 3x + 20$

Las ecuaciones

Como el signo del coeficiente numérico de la incógnita cuadrática es negativo, esta es una ecuación de Demanda.

Alerta

El Equilibrio de Mercado se representa por dos ecuaciones una positiva (La oferta) y otra negativa (La demanda), que al igualarse logran el equilibrio de mercado, pero como presentan una potencia cuadrática, su solución requerirá el empleo de una raíz.

Paso 2: La aplicación de un método de solución de dos incógnitas

Para dar solución a un ejercicio en el que se involucran dos ecuaciones con dos incógnitas pueden utilizarse diversos procedimientos, entre los más comunes se encuentran el método de igualación o el método de sustitución.

Paso 3: La igualación a cero; los valores a introducirse en la fórmula general

Para dar solución a un ejercicio en donde se vea involucrado una potencia se utilizará una raíz razón por lo cual la ecuación debe igualarse a cero.

Paso 4: Obtención del valor de la primera incógnita

Al dar solución, aplicando la fórmula general, se obtiene el valor de la primera incógnita, que será el resultado positivo que se obtenga.

Paso 5: Obtención del valor de la segunda incógnita

El resultado del valor de la primera incógnita se sustituirá en cualquiera de las ecuaciones originales.

Paso 6: Integración del punto de equilibrio del mercado

El P.E. se presenta al relacionar *x* unidades de equilibrio con *y* el precio de equilibrio.

Paso 7: Representación gráfica del equilibrio de mercado

El punto de equilibrio se grafica al asignar valores arbitrarios en la incógnita tanto de la ecuación de Oferta como de Demanda, presentándose el Punto de Equilibrio en el momento en que se cruzan las curvas.

Problema resuelto

Encuentra el punto de equilibrio del mercado, a partir de las siguientes ecuaciones de oferta y demanda: $y = x^2 + 4x + 5$ $y = -x^2 + 3x + 8$

Respuesta

$y = x^2 + 4x + 5$

$y = -x^2 + 3x + 8$

Paso 1: La identificación de cada ecuación, *debido al signo negativo de* $-x^2 + 3x + 8$ *esta es la ecuación de demanda, la otra ecuación será de oferta por el signo positivo.*

$y = y$ **Al igualar las "y" esta se suprime y nos quedamos con una incógnita**

$$x^2 + 4x + 5 = -x^2 + 3x + 8$$

$$x^2 + 4x + 5 + x^2 - 3x - 8 = 0$$

$$2x^2 + x - 3 = 0$$

Paso 2: La aplicación de un método de solución de dos incógnitas; *se decidió utilizar el método de igualación para igualarlas y posteriormente igualar toda la ecuación a cero.*

$$\frac{-(1) \pm \sqrt{(1)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)}$$

$$\frac{-(1) \pm \sqrt{25}}{4}$$

Paso 3: La igualación a cero; los valores a introducirse en la fórmula general $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $a = 2, b = 1, c = -3$

Respuesta (*continuación*)

Paso 4: Obtención del valor de la primera incógnita *en este caso obtenemos el valor de x como primera incógnita.*

$$\frac{-1 \pm 5}{4} = \begin{cases} \frac{-1+5}{4} = +1 \\ \frac{-1-5}{4} = -1.5 \end{cases}$$

El valor de x es uno, el resultado positivo del ejercicio.

La Oferta

$y = x^2 + 4x + 5$

$y = 1(1)^2 + 4(1) + 5$

$y = 10$

El Punto de Equilibrio (1, 10)

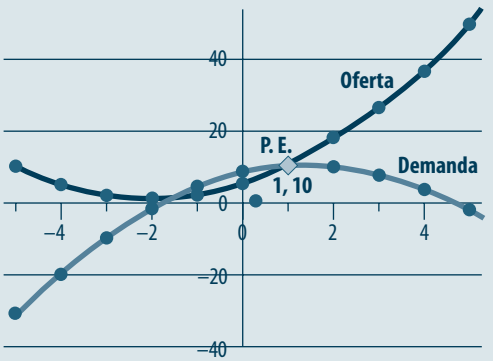
Paso 5: Obtención del valor de la segunda incógnita: *sustituimos el resultado de la primera incógnita en cualquiera de las ecuaciones originales, obteniéndose la segunda incógnita.*

Paso 6: Integración del punto de equilibrio del mercado *el punto de equilibrio es* (1, 10).

Paso 7: Representación gráfica del equilibrio del mercado.

$x^2 + 4x + 5 = y$		
$(-5)^2$	(-5)	10
$(0)^2$	(0)	5
$(1)^2$	(1)	10
$(3)^2$	(3)	26

$-x^2 + 3x + 8 = y$		
$-(-4)^2$	(-4)	-20
$-(0)^2$	(0)	8
$-(1)^2$	(1)	10
$-(5)^2$	(5)	-2



Problema resuelto

Encuentra el punto de equilibrio del mercado, a partir de las siguientes ecuaciones de oferta y demanda: $y = x^2 + 4x + 2$ $y = -3x^2 + 3x + 20$

Respuesta

$y = x^2 + 4x + 2$

$y = -3x^2 + 3x + 20$

Paso 1: La identificación de cada ecuación, *debido al signo negativo de* $-3x^2 + 3x + 20$ *esta es la ecuación de demanda, la otra ecuación es oferta por el signo positivo.*

$y = y$ **Al igualar las "y" esta se suprime y nos quedamos con una incógnita**

$$x^2 + 4x + 2 = -3x^2 + 3x + 20$$

$$x^2 + 4x + 2 + 3x^2 - 3x - 20 = 0$$

$$4x^2 + x - 18 = 0$$

Paso 2: La aplicación de un método de solución de dos incógnitas; *se decidió utilizar el método de igualación para igualarlas y posteriormente igualar toda la ecuación a cero.*

Respuesta (*continuación*)

$$\frac{-(1) \pm \sqrt{(1)^2 - 4(4)(-18)}}{2(4)}$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{289}}{8}$$

Paso 3: La igualación a cero; los valores a introducirse en la fórmula general $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $a = 4, b = 1, c = -18$

Paso 4: Obtención del valor de la primera incógnita *en este caso obtenemos el valor de x como primera incógnita.*

$$\frac{-1 \pm 17}{8} = \begin{cases} \frac{-1 + 17}{8} = +2 \\ \frac{-1 - 17}{8} = -2.25 \end{cases}$$

El valor de x es 2, el resultado positivo del ejercicio.

La Oferta

$y = x^2 + 4x + 2$

$y = (2)^2 + 4(2) + 2$

$y = 14$

El Punto de Equilibrio (2, 14)

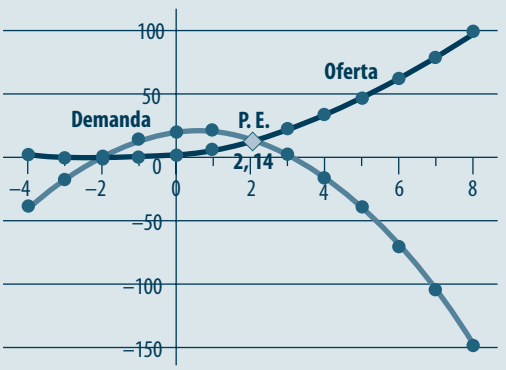
Paso 5: Obtención del valor de la segunda incógnita: *sustituimos el resultado de la primera incógnita en cualquiera de las ecuaciones originales, obteniéndose la segunda incógnita.*

Paso 6: Integración del punto de equilibrio del mercado *el punto de equilibrio es* (2, 14).

Paso 7: Representación gráfica del equilibrio del mercado.

$x^2 + 4x + 2 = y$		
$(-3)^2$	(-3)	-1
$(-2)^2$	(-2)	-2
$(0)^2$	(0)	2
$(2)^2$	(2)	14

$-3x^2 + 3x + 20 = y$		
$(-4)^2$	(-4)	-40
$(0)^2$	(0)	20
$(1)^2$	(1)	20
$(2)^2$	(2)	14



Problemas para resolver

Resuelve los siguientes ejercicios:

2.1 Obtén las raíces exactas de la ecuación $x^2 + 2x - 3 = 0$

2.2 Obtén las raíces exactas de la ecuación $x^2 - 2x - 3 = 0$

2.3 Obtén las raíces exactas de la ecuación $x^2 - x = 20$

2.4 Obtén las raíces exactas de la ecuación $-x^2 - x = -2$

2.5 Obtén las raíces exactas de la ecuación $x^2 - 9x + 8 = 0$

2.6 Obtén las raíces exactas de la ecuación $-x^2 - 16x + 17 = 0$

2.7 Obtén las raíces exactas de la ecuación $-x^2 = -4$

2.8 Obtén las raíces exactas de la ecuación $-2.5x^2 + 0.9 = 0$

2.9 Obtén las raíces exactas de la ecuación $2x^2 = -16x$

2.10 Obtén las raíces exactas de la ecuación $1.8x^2 = 8x$

2.11 Obtén las raíces exactas, el vértice y la gráfica de la ecuación $y = -2x^2 + 4x + 6$

2.12 Obtén las raíces exactas, el vértice y la gráfica de la ecuación $y = 2x^2 + 4x - 6$

2.13 Obtén las raíces exactas, el vértice y la gráfica de la ecuación $y = 8x^2 - 10x + 2$

2.14 Obtén las raíces exactas, el vértice y la gráfica de la ecuación $y = -2x^2 + 7x + 30$

2.15 Obtén las raíces exactas, el vértice y la gráfica de la ecuación $y = -x^2 - x$

2.16 Obtén las raíces exactas, el vértice y la gráfica de la ecuación $y = 2x^2 + 2x - 4$

2.17 Obtén las raíces exactas, el vértice y la gráfica de la ecuación $y = 8x^2 - 2$

2.18 Obtén las raíces exactas, el vértice y la gráfica de la ecuación $y = 5x^2 - 20x$

2.19 Obtén las raíces exactas, el vértice y la gráfica de la ecuación $y = 4x^2 - 16x - 9$

2.20 Obtén las raíces exactas, el vértice y la gráfica de la ecuación $y = -20x^2 + 6x + 8$

Resuelve las siguientes parábolas con vértice en el origen:

2.21 Obtén la ecuación de la parábola, si el foco se encuentra en la coordenada (3, 0)

2.22 Obtén la ecuación de la parábola, si el foco se encuentra en la coordenada (–3, 0)

2.23 Obtén la ecuación de la parábola, si el foco se encuentra en la coordenada (0, 3)

2.24 Obtén la ecuación de la parábola, si el foco se encuentra en la coordenada (0, –3)

2.25 Obtén la ecuación de la parábola, si el foco se encuentra en la coordenada (2, 0)

2.26 Obtén la ecuación de la parábola, si la intersección de la directriz con el eje focal se encuentra en (–2, 0)

2.27 Obtén la ecuación de la parábola, si el foco se encuentra en la coordenada (0, 5)

2.28 Obtén la ecuación de la parábola, si la intersección de la directriz con el eje focal se encuentra en (0, –5)

2.29 Obtén la ecuación de la parábola, si el foco se encuentra en la coordenada (–4, 0)

2.30 Obtén la ecuación de la parábola, si la intersección de la directriz con el eje focal se encuentra en (0, –4)

2.31 Obtén la ecuación y gráfica de la parábola si conocemos que el foco se encuentra en la coordenada $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

2.32 Obtén la ecuación y gráfica de la parábola si conocemos que la directriz con el eje focal se encuentra en la coordenada (3.5, 0)

2.33 Obtén la ecuación y gráfica de la parábola si conocemos que (5, 10) y (5, –10) son los extremos del lado recto

2.34 Obtén la ecuación y gráfica de la parábola si conocemos que (–10, 5) y (10, 5) son los extremos del lado recto

2.35 Obtén la ecuación y gráfica de la parábola si conocemos que (–2, –1) y (2, –1) son los extremos del lado recto

2.36 Obtén la ecuación y gráfica de la parábola si conocemos que (–1, 2) y (–1, –2) son los extremos del lado recto

Resuelve las siguientes parábolas con vértice fuera del origen:

2.37 Obtén la ecuación y gráfica de la parábola de vértice (7, 3) e intersección de la directriz con el eje focal en (7, 1)

2.38 Obtén la ecuación y gráfica de la parábola de vértice (–7, –3) e intersección de la directriz con el eje focal en (–7, –1)

2.39 Obtén la ecuación y gráfica de la parábola de vértice (7, –3) e intersección de la directriz con el eje focal en (5, –3)

2.40 Obtén la ecuación y gráfica de la parábola de vértice (–7, 3) si conocemos que (–9, 7) y (–9, –1) son los extremos del lado recto

2.41 Obtén la ecuación y la gráfica de la parábola de foco (6, 0) e intersección de la directriz con el eje focal en (6, 6)

2.42 Obtén la ecuación y la gráfica de la parábola de foco (–2, –5) e intersección de la directriz con el eje focal en (–2, 1)

2.43 Obtén la ecuación y la gráfica de la parábola si el foco es de coordenada (5, 5) y los extremos del lado recto (1, 5) y (9, 5)

2.44 Obtén la ecuación y la gráfica de la parábola si la intersección de la directriz con el eje focal se ubica en la coordenada (–3, 3) y los extremos del lado recto son (3, 9) y (3, –3)

2.45 Obtén la ecuación y la gráfica de la parábola si el vértice es de coordenada (1, 1) y la intersección de la directriz con el eje focal se ubica en la coordenada (–1, 1)

2.46 Obtén la ecuación y la gráfica de la parábola si el vértice es de coordenada (3, 3) y la intersección de la directriz con el eje focal se ubica en la coordenada (5, 3)

2.47 Obtén la ecuación y la gráfica de la parábola si los extremos del lado recto son (0, 3) y (0, –1) y su parámetro es de 1

Obtén la forma general de las siguientes ecuaciones estándar:

2.48 De la ecuación estándar $(x-7)^2 = 8(y-3)$ obtén su forma general

2.49 De la ecuación estándar $(x+7)^2 = -8(y-3)$ obtén su forma general

2.50 De la ecuación estándar $(y+3)^2 = 8(x-7)$ obtén su forma general

2.51 De la ecuación estándar $(y-3)^2 = -8(x+7)$ obtén su forma general

2.52 De la ecuación estándar $(x+1)^2 = -6(y+2)$ obtén su forma general

2.53 De la ecuación estándar $(x-2)^2 = 10(y+3)$ obtén su forma general

2.54 De la ecuación estándar $(y+2)^2 = -12(x+2)$ obtén su forma general

2.55 De la ecuación estándar $(x-3)^2 = -8(y-3)$ obtén su forma general

2.56 De la ecuación estándar $(y+4)^2 = 14(x+6)$ obtén su forma general

2.57 De la ecuación estándar $(x-5)^2 = 16(y+5)$ obtén su forma general

2.58 De la ecuación estándar $(y-23)^2 = 1(x-530)$ obtén su forma general

2.59 De la ecuación estándar $(x+4.5)^2 = 8(y-5.5)$ obtén su forma general

2.60 De la ecuación estándar $(y-10.6)^2 = -16(x-12.2)$ obtén su forma general

Obtén la forma estándar o canónica de las siguientes ecuaciones:

2.61 A partir de la ecuación general $x^2 - 14x - 8y + 73 = 0$ obtén su forma estándar

2.62 A partir de la ecuación general $x^2 + 14x + 8y + 73 = 0$ obtén su forma estándar

2.63 A partir de la ecuación general $y^2 + 6y - 8x + 65 = 0$ obtén su forma estándar

2.64 A partir de la ecuación general $y^2 - 6y + 8x + 65 = 0$ obtén su forma estándar

2.65 A partir de la ecuación general $x^2 + 2x - 4y - 3 = 0$ obtén su forma estándar

2.66 A partir de la ecuación general $x^2 + 2x + 6y + 13 = 0$ obtén su forma estándar

2.67 A partir de la ecuación general $x^2 + 4x + 8y + 20 = 0$ obtén su forma estándar

2.68 A partir de la ecuación general $x^2 - 4x - 10y - 26 = 0$ obtén su forma estándar

2.69 A partir de la ecuación general $y^2 + 4y + 12x + 28 = 0$ obtén su forma estándar

2.70 A partir de la ecuación general $y^2 - 6y + 8x - 15 = 0$ obtén su forma estándar

2.71 A partir de la ecuación general $y^2 + 8y - 14x - 68 = 0$ obtén su forma estándar

2.72 A partir de la ecuación general $y^2 - 10y - 16x - 55 = 0$ obtén su forma estándar

Obtén los máximos o los mínimos de acuerdo a las siguientes funciones:

2.73 Obtén el Ingreso máximo esperado en base a la función $I = -x^2 + 18x$

2.74 Obtén el Ingreso máximo esperado en base a la función $I = -2x^2 + 24x + 30$

2.75 Obtén el Ingreso máximo esperado en base a la función $I = -x^2 + 2x + 14$

2.76 Obtén el Ingreso máximo esperado en base a la función $I = -8x^2 + 16x + 12$

2.77 Obtén el Costo mínimo en base a la función $C = 20x^2 - 40x + 21$

2.78 Obtén el Costo mínimo en base a la función $C = 3x^2 - 30x + 130$

2.79 Obtén el Costo mínimo en base a la función $C = 3x^2 - 222x + 10\,000$

2.80 Obtén el Costo mínimo en base a la función $C = 1.2x^2 - 62.4x + 5\,821.50$

2.81 Obtén el Costo mínimo en base a la función $C = 15x^2 - 60x + 240$

2.82 Obtén la utilidad máxima en base a la función $U = -x^2 + 2x + 1$.

2.83 Obtén la utilidad máxima en base a la función $U = -10x^2 + 2\,000x + 1$

2.84 Obtén la utilidad máxima en base a la función $U = -0.05x^2 + 2\,000x$

2.85 Obtén la utilidad máxima en base a las funciones de ingreso y costo respectivas $I = -4x^2 + 5\,000x + 200$, $C = x^2 - 100x$

2.86 Obtén la utilidad máxima en base a las funciones de ingreso y costo respectivas $I = -2x^2 + 24\,900x + 200\,000$, $C = 2x^2 - 300x + 10\,000$

Problemas para resolver

2.87 Obtén la utilidad máxima en base a las funciones de ingreso y costo respectivas $I = -6x^2 + 14\,900x + 5$, $C = 4x^2 - 600x + 5$

2.88 Un empresario observó que al dar a $30.00 la pieza vende 105 piezas, pero si su precio aumenta 20%, sus ventas disminuyen 20%, si x representa las unidades indica:

a) ¿Cuál es el ingreso máximo?

b) ¿Cuántas unidades generan ese ingreso máximo?

2.89 Una empresa que ofrece un artículo en $75.00 vende 600 piezas, pero al disminuir el precio 10%, las ventas se incrementan 150 unidades, si y representa el precio indique:

a) ¿Cuál será el máximo ingreso a obtenerse?

b) ¿Cuántas son las unidades que se ofrecen para lograr ese máximo ingreso?

c) ¿Cuál es el máximo precio que la mayoría de los compradores pagarían?

En los ejercicios siguientes obtén el equilibrio de mercado:

2.90 Determina el punto de equilibrio del mercado al presentarse las siguientes ecuaciones de oferta y demanda: $y = 2x^2 + 4x + 2$, $y = -3x^2 + 3x + 24$

2.91 Determina el punto de equilibrio del mercado al presentarse las siguientes ecuaciones de oferta y demanda: $p = 2q^2 - 30$, $p = -19q + 78$

2.92 Determina el punto de equilibrio del mercado al presentarse las siguientes ecuaciones de oferta y demanda: $p = 2q^2 + 2$, $p = -3q^2 + 15q + 22$

2.93 Determina el punto de equilibrio del mercado al presentarse las siguientes ecuaciones de oferta y demanda: $y = x^2 - 25$, $y = -3x^2 + 15x$

2.94 Determina el punto de equilibrio del mercado al presentarse las siguientes ecuaciones de oferta y demanda: $p = 2q^2 - 30$, $\dfrac{p - 78}{-6} = p$

2.95 Determina el punto de equilibrio del mercado al presentarse las siguientes ecuaciones de oferta y demanda: $p = 2q^2 - 30$, $-6q = -26 + p$

PROBLEMAS RETO

1 Un empresario sabe que si ofrece un producto en $100.00 vende 4 500 piezas y si el mismo producto lo ofrece a $60.00 venderá 5 500 piezas, si x representa las unidades y el precio es representado por y indica:

a) La ecuación del ingreso.

b) ¿Cuántas piezas se deben vender para generar el máximo ingreso?

c) ¿Cuál es el ingreso máximo?

d) La ecuación de la parábola en su forma general.

e) A partir de la forma general obtén la ecuación estándar.

2 Una empresa presenta la siguiente ecuación de costos $C = x^2 - 5x + 30$, si el empresario busca minimizar su costo:

a) Indica con cuántas unidades logra la minimización.

b) Obtén la ecuación de la parábola en su forma general.

c) A partir de la forma general obtén la ecuación estándar.

d) Grafica su solución.

UNIDAD 3

Límites (laterales, infinitos y ceros), su resolución analítica y aritmética. La continuidad o discontinuidad de funciones

OBJETIVOS

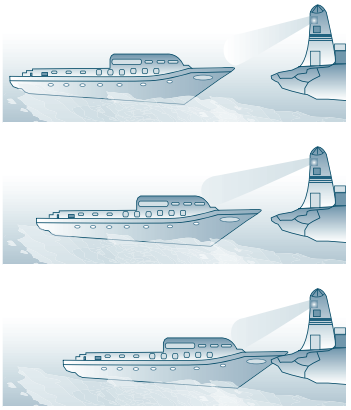
- Identificar en qué momento un valor se aproxima por la izquierda o por la derecha.
- Identificar los distintos teoremas aplicables a límites.
- Calcular límites laterales.
- Calcular límites determinados e indeterminados.
- Solucionar límites indeterminados.
- Analizar los límites determinados e indeterminados para conocer su resultado.
- Identificar cuándo hay continuidad en una función y cuándo hay discontinuidad.

¿QUÉ SABES?

- ¿Qué tan cercano puede ser el valor de a sin ser a?
- ¿Existirá un último valor en aproximación a a?
- Si los límites laterales son distintos, ¿existirá el límite?
- ¿Un límite indeterminado tendrá solución o quedará indeterminado?
- ¿Un límite que tiende a infinito tiene solución?
- ¿Cuando $x \to a^-$ se dice que los valores se aproximan a a por abajo o por la izquierda?
- ¿Cuando $x \to a^+$ se dice que los valores se aproximan a a por arriba o por la derecha?

3.1 Introducción

Un límite es una secuencia infinita de magnitudes en aproximación cada vez mayor a un punto determinado, pero sin llegar a ser ese valor límite, acercándose tanto como la misma situación lo permita.



Alerta

Un límite es la aproximación a a sin ser a.

Los límites son comunes en la vida cotidiana y muchas veces al respetar esos límites, se logra el éxito de algo.

Como se indicó un límite es tomado como una sucesión de infinitas magnitudes acercándose cada vez más a un punto deseado, pero sin ser ese punto.

En la imagen observamos un barco que se va acercando a tierra y se aproxima tanto como se puede, pero sin llegar a tocarla, porque si toca el punto deseado llamado tierra, encallaría.

Matemáticamente con los límites sucede algo similar presentándose una secuencia infinita de magnitudes en aproximación a una función que en valores cambiará conforme esta se aproxime al punto deseado.

3.2 Límite

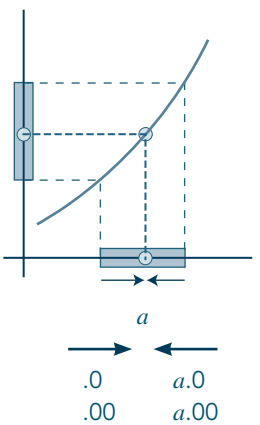
El límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a a por la izquierda o por la derecha es considerado L cuando se asignan arbitrariamente valores a $f(x)$, tan cercanos como se desee, eligiendo una x lo bastante cercana a a pero distinta de a, su representación: $\lim_{x \to a} f(x) = L$

En otras palabras se dice que x tiende; su representación $x \to a$ pero sin ser a, tomando valores positivos o negativos tan cercanos (infinitamente pequeños) como se desee, sin ser a.

Observa lo siguiente:

Cuando x tiende (por la izquierda) $x < a$ significa que toma valores menores que a

Se dice que tiende por abajo, representándose $x \to a^-$ es decir por valores menores que a



Cuando x tiende (por la derecha) $x > a$ significa que toma valores mayores que a

Se dice que tiende por arriba, representándose $x \to a^+$ es decir por valores mayores que a

Alerta

Los límites laterales tienden a a por la izquierda o por la derecha con valores menores por izquierda y mayores por derecha.

El acercarse por la izquierda o por la derecha se conoce como límites laterales.

3.3 Límites laterales

Es el acercamiento a a por la izquierda o por la derecha pero sin tocarla; acercándose al utilizar pequeños valores por la izquierda o por la derecha, sin ser a, indicándose lo siguiente:

El límite de $f(x)$ cuando $x \to$ (equis tiende) es igual a L si y solo si los límites laterales existen.

Prueba de existencia de un límite

Si el límite $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ y el límite $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

por lo tanto

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

$$L^- = L^+$$

Ejemplo

Cuando x tiende a 2

$$\lim_{x \to 2} 2x$$

Por la izquierda x toma valores próximos a 2 pero menores, 1.9 1.99 1.99999

Por la izquierda:

$$\lim_{x \to +2} = 2(1.9) = 3.8$$

$$\lim_{x \to +2} = 2(1.99) = 3.98$$

$$\lim_{x \to +2} = 2(1.99999) = 3.99998$$

Por la derecha x se acerca a 2 pero con valores mayores, 2.1 2.01 2.0000001

Por la derecha

$$\lim_{x \to +2} = 2(2.1) = 4.2$$

$$\lim_{x \to +2} = 2(2.01) = 4.02$$

$$\lim_{x \to +2} = 2(2.00001) = 4.00002$$

En la función $\lim_{x \to +2} 2x$ cuando x toma valores $\mathbf{2^{\pm}}$, menores a a por la izquierda o mayores a a por la derecha, el límite sí existe, ya que por la izquierda o por la derecha el límite de la función **2x** cuando tiende a +2 se aproxima a +4.

Al ser los límites laterales iguales; el límite sí existe.

Problema resuelto

Comprobar si existe el $\lim_{x \to +3} 2x =$

Respuesta

Cuando x tiende a +3

$$\lim_{x \to +3} 2x =$$

Por la izquierda x toma valores próximos a +3 pero menores, 3^- 2.9 2.99 2.99999

Por la izquierda:

$$\lim_{x \to +3} = 2(2.9) = 5.8$$

$$\lim_{x \to +3} = 2(2.99) = 5.98$$

$$\lim_{x \to +3} = 2(2.99999) = 5.99998$$

Por la derecha x toma valores próximos a +3 pero mayores, 3^+ 3.1 3.01 3.00001

Por la derecha

$$\lim_{x \to +3} = 2(3.1) = 6.2$$

$$\lim_{x \to +3} = 2(3.01) = 6.02$$

$$\lim_{x \to +3} = 2(3.00001) = 6.00002$$

En la función $\lim_{x \to +3} 2x =$ cuando x toma valores $\mathbf{3^{\pm}}$, menores a a por la izquierda o mayores a a por la derecha, el límite sí existe, ya que por la izquierda o por la derecha el límite de la función **2x** cuando tiende a +3 se aproxima a +6.

Alerta

Los límites laterales tienden a a aproximándose por la derecha o la izquierda, y deben ser iguales para que el límite exista, caso contrario el límite no existe.

Problema resuelto

Comprobar si existe el $\lim_{x \to -4} 2x =$

Respuesta

Cuando x tiende a -4

$$\lim_{x \to -4} 2x =$$

Por la izquierda x toma valores próximos a -4 pero menores, 4^-
$-4.1 \quad -4.01 \quad -4.001$

Por la derecha x toma valores próximos a -4 pero mayores, 4^+
$-3.9 \quad -3.99 \quad -3.999$

En la función $\lim_{x \to -4} 2x =$ cuando x toma valores $-4^{\pm}$, menores a a por la izquierda o mayores a a por la derecha, el límite sí existe, ya que por la izquierda o por la derecha el límite de la función $2x$ cuando tiende a -4 se aproxima a -8.

ALERTA: Los límites laterales se utilizan para comprobar la existencia o no de un límite ya que cuando los límites laterales existen y son iguales el límite existe, pero cuando alguno de los límites laterales no existe o son diferentes el límite no existe.

Problema resuelto

Comprobar si existe $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} =$

Respuesta

Cuando x tiende a 0

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} =$$

Si x tiende por la izquierda toma valores menores que cero y como el valor absoluto de un valor es siempre positivo en la función se obtendría

$$\frac{\text{Valor Positivo}}{\text{Valor Negativo}} \quad \frac{+}{-} = -$$

Si x tiende por la derecha toma valores mayores que cero por lo que al calcular la función de resultado se obtiene

$$\frac{\text{Valor Positivo}}{\text{Valor Positivo}} \quad \frac{+}{+} = +$$

Como los límites laterales son diferentes el límite no existe.

ALERTA: Es importante resaltar que lo sobresaliente del tema límites es observar el comportamiento de los valores a medida que x se aproxima más y más a a sin ser a.

Alerta

Cuando al tender a a los límites laterales no sean iguales; el límite no existe.

3.4 Teoremas de los límites

Una manera de resolver límites es utilizando los siguientes teoremas:

El límite del producto de una constante por una función es la constante por el límite de la función.	$\lim_{x\to a}(k)f(x) = (k)\lim_{x\to a} f(x)$
	La constante k multiplicará al límite de la función.
El límite de la suma o resta de funciones es la suma o resta de los límites.	$\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$
	De sumar y restar los límites se obtiene el resultado de la función.
El límite del producto de dos funciones es el producto de los límites.	$\lim_{x\to a}[f(x) * g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) * \lim_{x\to a} g(x)$
	Al multiplicar los límites obtenemos el resultado de la función.
El límite de un cociente es igual al cociente de los límites, en tanto su denominador no sea cero.	$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$
	Al dividir los límites obtenemos el resultado de la función; siempre que el denominador sea distinto de cero.

Problema resuelto

Aplicar el teorema correspondiente para obtener el valor de $\lim_{x\to 2} 3x$

Respuesta

$$\lim_{x\to a}(k)f(x) = (k)\lim_{x\to a} f(x)$$

$$\lim_{x\to 2} 3x = (3)\lim_{x\to 2} x = (3)(2) = 6$$

Problema resuelto

Aplicar el teorema correspondiente para obtener el valor de $\lim_{x\to -4} 6x^2$

Respuesta

$$\lim_{x\to a}(k)f(x) = (k)\lim_{x\to a} f(x)$$

$$\lim_{x\to -4} 6x^2 = (6)\lim_{x\to -4} x^2 = (6)(-4)^2 = 6 * 16 = 96$$

Problema resuelto

Aplicar el teorema correspondiente para obtener el valor de $\lim_{x\to 2}(3x + x^2)$

Respuesta

$$\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to 2}(3x + x^2) = \lim_{x\to 2} 3x + \lim_{x\to 2} x^2 = (3)\lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} x^2 = (3)(2) + (2)^2 = 6 + 4 = 10$$

Problema resuelto

Aplicar el teorema correspondiente para obtener el valor de $\lim_{x\to 1}(2x - x^2)$

Respuesta

$$\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to 1}(2x - x^2) = \lim_{x\to 1} 2x - \lim_{x\to 1} x^2 = (2)\lim_{x\to 1} x - \lim_{x\to 1} x^2 = (2)(1) - (1)^2 = 2 - 1 = 1$$

Problema resuelto

Aplicar el teorema correspondiente para obtener el valor de $\lim_{x\to -4}(x - x^2)$

Respuesta

$$\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to -4}(x - x^2) = \lim_{x\to -4} x - \lim_{x\to -4} x^2 = \lim_{x\to -4} x - \lim_{x\to -4} x^2 = (-4) - (-4)^2 = -4 - 16 = -20$$

Problema resuelto

Aplicar el teorema correspondiente para obtener el valor de $\lim_{x\to 2}(2x + 3)(5x - 9)$

Respuesta

$$\lim_{x\to a}[f(x) * g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) * \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to 2}(2x + 3)(5x - 9) = \lim_{x\to 2}(2x + 3) * \lim_{x\to 2}(5x - 9) = [2(2) + 3][5(2) - 9] = 7 * 1 = 7$$

Problema resuelto

Aplicar el teorema correspondiente para obtener el valor de $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$

Respuesta

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{\lim_{x\to 0} x^2 - 1}{\lim_{x\to 0} x + 1} = \frac{\lim_{x\to 0} (0)^2 - 1}{\lim_{x\to 0} (0) + 1} = \frac{-1}{+1} = -1$$

Como se observa para obtener valor del límite, se sustituye el valor al que *x* tiende y al realizar las operaciones correspondientes se obtiene un resultado; solo que al sustituir *x* se pueden presentar dos opciones de resultado; un resultado Determinado o uno Indeterminado.

Resultado Determinado: un entero, fracción, decimal, cero o infinito.

Resultado Indeterminado $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0(\infty)$, $1^{(\infty)}$

Alerta

Al dar solución a un límite su resultado puede ser Determinado o Indeterminado.

3.5 Los límites y su solución

Como se indicó un límite puede ser determinado o indeterminado, pero para ser más precisos, en este texto emplearemos un tercero: el resultado Determinado directo.

Límite de resultado Determinado directo:	El resultado directo se obtiene cuando al sustituir el valor a que tiende *x* en el límite el resultado que se obtiene es un entero, fracción, decimal, además de cero o infinito.
Límite de resultado Determinado: **# simboliza cualquier número**	Un límite es considerado determinado, si su resultado es cero o infinito, pudiéndose presentar los siguientes tipos: Resultados que dan cero $\frac{0}{\#}$, $\frac{\#}{\pm\infty}$, $\frac{0}{\pm\infty}$ Resultados que dan infinito $\frac{\#}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\#}$, $\frac{\pm\infty}{0}$
Límite de resultado Indeterminado:	Un límite es indeterminado cuando al sustituir el valor a que tiende *x* da como resultado una indeterminación, aquí resolveremos el caso cero sobre cero.

Para dar solución a un problema de límites se recomienda seguir los siguientes pasos:

Paso 1: Sustituir el valor a que tiende x

Al sustituir *x*, puede obtenerse un resultado directo, determinado o indeterminado.

- Al ser directo o determinado lo que se obtenga será su resultado y el ejercicio concluyó.
- Al ser indeterminado se debe dar solución a los pasos 2 y 3 para factorizarlo; descomponiéndolo en un producto de dos valores, y así obtener el resultado del límite.

Paso 2: Primer factor del producto de factores (el no factorizable)

El primer factor del producto a formarse, será la expresión que no se encuentra elevada a una potencia cuadrática.

Paso 3: Segundo factor del producto de factores

El segundo valor puede obtenerse dividiendo el factorizable entre la expresión no elevada; comprobándose el resultado obtenido (segundo valor) al multiplicarlos, teniendo presente que el resultado puede ser un entero, fracción, decimal, tanto positivo como negativo.

Como se indica si el límite es directo o determinado, la solución será la sustitución a que tiende x, pero si es un indeterminado; un caso $\frac{0}{0}$ *será necesario aplicar un procedimiento algebraico adicional que podrá ser la división de polinomios o la factorización.*

Problema resuelto

Obtener el valor del límite $\lim_{x\to 5}(x^2 + 3x - 5)$

Respuesta

$\lim_{x\to 5}([5]^2 + 3[5] - 5) = 35$

Paso 1: Sustituir el valor a que tiende *x*; *al darle solución se obtiene un resultado determinado un valor directo.*

Problema resuelto

Obtener el valor del límite $\lim_{x\to -4} x^2 + 8x$

Respuesta

$\lim_{x\to -4} = [-4]^2 + 8[-4] = -16$

Paso 1: Sustituir el valor a que tiende *x*; *al darle solución obtenemos un resultado determinado, un valor directo.*

Problema resuelto

Obtener el valor del límite $\lim_{x\to 3}\left(\frac{\sqrt{x^2 + 7} + \sqrt{3x}}{x + 2}\right)$

Respuesta

$\lim_{x\to 3}\left(\frac{\sqrt{[3]^2 + 7} + \sqrt{3[3]}}{[3] + 2}\right) = \left(\frac{\sqrt{16} + \sqrt{9}}{5}\right) = \frac{4 + 3}{5} = \frac{7}{5}$

Paso 1: Sustituir el valor a que tiende *x*; *al darle solución se obtiene un resultado determinado un valor directo, concluyendo en la fracción.*

Problema resuelto

Obtener el valor del límite $\lim_{x\to -1}(x + 5)^2$

Respuesta

$\lim_{x\to -1}[(-1) + 5]^2 = (4)^2 = 16$

Paso 1: Sustituir el valor a que tiende *x*; *al darle solución se obtiene un resultado determinado, un valor directo.*

Problema resuelto

Obtener el valor del límite $\lim_{x\to 0}\frac{x^2 - 1}{x + 1}$

Respuesta

$\lim_{x\to 0}\frac{[0]^2 - 1}{[0] + 1} = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1$

Paso 1: Sustituir el valor a que tiende *x*; *al darle solución se obtiene un resultado determinado, un valor directo.*

Problema resuelto

Obtener el valor del límite $\lim_{x \to 2} (2 - x)$

Respuesta

$\lim_{x \to 2} [2 - (2)] = 0$

Paso 1: Sustituir el valor a que tiende *x*; *al darle solución se obtiene un resultado determinado; cero de resultado.*

Problema resuelto

Obtener el valor del límite $\lim_{x \to -4} \dfrac{x^2 + 9x - 22}{x - 2}$

Respuesta

$$\lim_{x \to -4} \frac{[-4]^2 + 9[-4] - 22}{[-4] - 2} = \frac{-42}{-6} = 7$$

Paso 1: Sustituir el valor a que tiende *x*; *al darle solución se obtiene un resultado determinado, un valor directo.*

Problema resuelto

Obtener el valor del límite $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 + x^2 - 3x - 3}{x + 1}$

Respuesta

$$\lim_{x \to 1} \frac{[1]^3 + [1]^2 - 3[1] - 3}{[1] + 1} = \frac{-4}{+2} = -2$$

Paso 1: Sustituir el valor a que tiende *x*; *al darle solución obtenemos un resultado determinado, un valor directo.*

Problema resuelto

Obtener el valor del límite $\lim_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{x}$

Respuesta

$$\lim_{x \to 1} \frac{[1] - 1}{[1]} = \frac{1 - 1}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

Paso 1: Sustituir el valor a que tiende *x*; *al darle solución obtenemos un resultado determinado del tipo:* $\dfrac{0}{\#} = 0$

Problema resuelto

Obtener el valor del límite $\lim_{x \to 1} \dfrac{x}{x - 1}$

Respuesta

$$\lim_{x \to 1} \frac{[1]}{[1] - 1} = \frac{1}{1 - 1} = \frac{1}{0} = \infty$$

Paso 1: Sustituir el valor a que tiende *x*; *al darle solución obtenemos un resultado determinado del tipo:* $\dfrac{\#}{0} = \infty$

Problema resuelto

Obtener el valor del límite $\lim_{x\to 0} 2 + \frac{1}{x^2}$

Respuesta

$$\lim_{x\to 0} 2 + \frac{1}{[0]^2} = 2 + \frac{1}{0} = 2 + \infty = \infty$$

Paso 1: Sustituir el valor a que tiende "x"; *al resolverlo observamos que infinito más dos da de resultado infinito, un límite determinado.*

Problema resuelto

Obtener el valor del límite $\lim_{x\to -3} \frac{2x^2 + 4x - 6}{2x - 2}$

Respuesta

$$\lim_{x\to -3} \frac{2[-3]^2 + 4[-3] - 6}{2[-3] - 2} = \frac{0}{-8} = 0$$

Paso 1: Sustituir el valor a que tiende "x"; *al resolverlo observamos que cero entre cualquier valor; resultará determinado, su valor cero.*

Problema resuelto

Obtener el valor del límite $\lim_{x\to \infty} \frac{2}{x^2 + 1}$

Respuesta

$$\lim_{x\to \infty} \frac{2}{[\infty]^2 + 1} = \frac{2}{\infty^2 + 1} = \frac{2}{\infty} = 0$$

Paso 1: Sustituir el valor a que tiende "*x*"; *al resolverlo se observa que cualquier valor entre infinito; resultará determinado, su valor cero.*

Problema resuelto

Obtener el valor del límite $\lim_{x\to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}$

Respuesta

$$\lim_{x\to 4} \frac{[4]^2 - 16}{[4] - 4} = \frac{16 - 16}{4 - 4} = \frac{0}{0}$$

Paso 1: Sustituir el valor a que tiende "*x*"; *al resolverlo observamos que su resultado es indeterminado; del tipo:*

$$\frac{0}{0}$$

*Que tendrá solución aplicando los pasos **2 y 3** de los pasos propuestos.*

Problema resuelto

Obtener el valor del límite $\lim_{x\to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} =$

Respuesta

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \frac{[4]^2 - 16}{[4] - 4} = \frac{0}{0}$$

Paso 1: Sustituir el valor a que tiende "x"; al resolverlo observamos que es indeterminado.

El primer factor

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \frac{(x - 4)(\quad)}{x - 4}$$

Paso 2: Primer factor del producto de factores (el no factorizable); se *ubica abajo por lo tanto se subirá, colocándose como el primer factor del producto de factores.*

El faltante

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \frac{(x - 4)(\quad)}{x - 4}$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \frac{(x - 4)(x + 4)}{x - 4} = x + 4$$

$$= (4) + 4 = 8$$

Es el resultado del límite

Paso 3: Segundo factor del producto de factores; *aquí se busca el segundo valor, las maneras de hacerlo son:*

Una manera es Dividir

$$\begin{array}{r|l} & \mathbf{x + 4} \\ \hline x - 4 & x^2 \_\_ - 16 \\ & -x^2 + 4x \\ \hline & / \ + 4x - 16 \\ & \quad -4x + 16 \\ \hline & \quad / \end{array}$$

Otra es factorizar por diferencia de cuadrados: donde se realizará la extracción de sus raíces; los valores base.

$$\sqrt{x^2} = x$$

$$\sqrt{16} = 4$$

Alerta

Un límite Indeterminado del tipo $\frac{0}{0}$ puede resolverse por medio de la división, la factorización, diferencia de cuadrados o la multiplicación de polinomios, entre otras.

Alerta

Al factorizar por diferencia de cuadrados se aplica la suma de sus bases por la diferencia de sus bases.

Problema resuelto

Obtener el valor del límite $\lim_{x\to 9} \frac{x^2 - 81}{x - 9} =$

Respuesta

$$\lim_{x\to 9} \frac{x^2 - 81}{x - 9} = \frac{[9]^2 - 81}{[9] - 9} = \frac{0}{0}$$

Paso 1: Sustituir el valor a que tiende "x"; *al resolverlo observamos que es indeterminado.*

El primer factor

$$\lim_{x\to 9} \frac{x^2 - 81}{x - 9} = \frac{(x - 9)(\quad)}{x - 9}$$

Paso 2: Primer factor del producto de factores (el no factorizable); se *ubica abajo por lo tanto se subirá, colocándose como el primer factor del producto de factores.*

El faltante

$$\lim_{x\to 9} \frac{x^2 - 81}{x - 9} = \frac{(x - 9)(\quad)}{x - 9}$$

$$\lim_{x\to 9} \frac{x^2 - 81}{x - 9} = \frac{(x - 9)(x + 9)}{x - 9} = x + 9$$

$$= (9) + 9 = 18$$

Paso 3: Segundo factor del producto de factores; *aquí se busca el segundo valor, las maneras de hacerlo son:*

Una manera es Dividir

$$\begin{array}{r|l} & \mathbf{x + 9} \\ \hline x - 9 & x^2 \_\_ - 81 \\ & -x^2 + 9x \\ \hline & / \ + 9x - 81 \\ & \quad -9x + 81 \\ \hline & \quad / \end{array}$$

Otra es factorizar por diferencia de cuadrados: donde se realizará la extracción de sus raíces; los valores base.

$$\sqrt{x^2} = x$$

$$\sqrt{81} = 9$$

Alerta

Cuando se factoriza en el denominador el resultado es una fracción.

Problema resuelto

Obtener el valor del límite $\lim_{x\to -3} \frac{x+3}{x^2-9} =$

Respuesta

$$\lim_{x\to -3} \frac{x+3}{x^2-9} = \frac{[-3]+3}{[-3]^2-9} = \frac{0}{0}$$

Paso 1: Sustituir el valor a que tiende "x"; *al resolverlo observamos que es indeterminado.*

$$\lim_{x\to -3} \frac{x+3}{x^2-9} = \frac{x+3}{(x+3)(\quad)}$$

El primer factor

Paso 2: Primer factor del producto de factores (el no factorizable); se *ubica arriba por lo tanto se* ***bajará****, colocándose como el primer factor.*

$$\lim_{x\to -3} \frac{x+3}{x^2-9} = \frac{x+3}{(x+3)(\quad)}$$

El faltante

$$\lim_{x\to -3} \frac{x+3}{x^2-9} = \frac{\cancel{(x+3)}}{\cancel{(x+3)}(x-3)} = \frac{}{x-3}$$

$$= \frac{1}{(-3)-3} = \frac{1}{-6} = -\frac{1}{6}$$

Paso 3: Segundo factor del producto de factores; *aquí se busca el segundo factor, puede hacer la división*

$$x+3 \;\overline{)\,x^2-9} = x-3$$

Otra es factorizar por diferencia de cuadrados: extrayendo sus raíces; los valores base; a*plicando la suma de sus bases por la diferencia de sus base, solo que como la factorización se hace abajo el resultado es una fracción.*

Alerta

Cuando se factoriza en el numerador el resultado es un entero.

Problema resuelto

Obtener el valor del límite $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+29x-30}{x-1} =$

Respuesta

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+29x-30}{x-1} = \frac{[1]^2-29[1]-30}{[1]-1} = \frac{0}{0}$$

Paso 1: Sustituir el valor a que tiende "x"; *al resolverlo observamos que es indeterminado.*

El primer factor

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+29x-30}{x-1} = \frac{(x-1)(\quad)}{x-1}$$

Paso 2: Primer factor del producto de factores (el no factorizable); se *ubica abajo por lo tanto se* ***subirá,*** *colocándose como el primer factor.*

El faltante

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+29x-30}{x-1} = \frac{(x-1)(\quad)}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+29x-30}{x-1} = \frac{\cancel{(x-1)}(x+30)}{\cancel{x-1}} = x+30$$

$$= (1)+30 = 31$$

Paso 3: Segundo factor del producto de factores; *aquí se busca el segundo factor, puede hacer la división*

$$x-1 \;\overline{)\,x^2+29x-30} = x+30$$

Otra opción es buscar el número que multiplicado por el primer valor −1 da el tercer término del ejercicio −30, resultando +30

Problema resuelto

Obtener el valor del límite $\lim_{x\to -3} \dfrac{2x^2 - 2x - 24}{x + 3} =$

Respuesta

$$\lim_{x\to -3} \frac{2x^2 - 2x - 24}{x + 3} = \frac{2[-3]^2 - 2[-3] - 24}{[-3] + 3} = \frac{0}{0}$$

El primer factor

$$\lim_{x\to -3} \frac{2x^2 - 2x - 24}{x + 3} = \frac{(x + 3)(\quad)}{x + 3}$$

El faltante

$$\lim_{x\to -3} \frac{2x^2 - 2x - 24}{x + 3} = \frac{(x + 3)(\quad)}{x + 3}$$

$$\lim_{x\to -3} \frac{2x^2 - 2x - 24}{x + 3} = \frac{(x + 3)(2x - 8)}{x + 3} = 2x - 8$$

$$= 2(-3) - 8 = -14$$

Paso 1: Sustituir el valor a que tiende "x"; *al resolverlo observamos que es indeterminado.*

Paso 2: Primer factor del producto de factores (el no factorizable); se *ubica abajo por lo tanto se subirá, colocándose como el primer factor.*

Paso 3: Segundo factor del producto de factores; aquí se busca el segundo factor, puede hacer la división

$$x + 3 \;\overline{)\,2x^2 - 2x - 24} = 2x - 8$$

Otra opción es buscar el número que multiplicado por el primer valor $+3$ da el tercer término del ejercicio -24, resultando -8

Problema resuelto

Obtener el valor del límite $\lim_{x\to 1} \dfrac{5x^2 - 2x - 3}{x - 1} =$

Respuesta

$$\lim_{x\to 1} \frac{5x^2 - 2x - 3}{x - 1} = \frac{5[1]^2 - 2[1] - 3}{[1] - 1} = \frac{0}{0}$$

El primer factor

$$\lim_{x\to 1} \frac{5x^2 - 2x - 3}{x - 1} = \frac{(x - 1)(\quad)}{x - 1}$$

El faltante

$$\lim_{x\to 1} \frac{5x^2 - 2x - 3}{x - 1} = \frac{(x - 1)(\quad)}{x - 1}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{5x^2 - 2x - 3}{x - 1} = \frac{(x - 1)(5x + 3)}{x - 1} = 5x + 3$$

$$= 5(1) + 3 = 8$$

Paso 1: Sustituir el valor a que tiende "x"; al resolverlo observamos que es indeterminado.

Paso 2: Primer factor del producto de factores (el no factorizable); se *ubica abajo por lo tanto se subirá, colocándose como el primer factor.*

Paso 3: Segundo factor del producto de factores; *aquí se busca el segundo factor, puede hacer la división*

$$x - 1 \;\overline{)\,5x^2 - 2x - 3} = 5x + 3$$

Otra opción es buscar el número que multiplicado por el primer valor -1 da el tercer término del ejercicio -3, resultando $+3$

Problema resuelto

Obtener el valor del límite $\lim_{x\to 3} \dfrac{-3x^2 + 6x + 9}{-x + 3} =$

Respuesta

$$\lim_{x\to 3} \frac{-3x^2 + 6x + 9}{-x + 3} = \frac{-3[3]^2 + 6[3] + 9}{-[3] + 3} = \frac{0}{0}$$

El primer factor

$$\lim_{x\to 3} \frac{-3x^2 + 6x + 9}{-x + 3} = \frac{(-x + 3)(\quad)}{-x + 3}$$

El faltante

$$\lim_{x\to 3} \frac{-3x^2 + 6x + 9}{-x + 3} = \frac{(-x + 3)(\quad)}{-x + 3}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{-3x^2 + 6x + 9}{-x + 3} = \frac{\cancel{(-x + 3)}(3x + 3)}{\cancel{-x + 3}} = 3x + 3$$

$$= 3(3) + 3 = 12$$

Paso 1: Sustituir el valor a que tiende "x"; *al resolverlo observamos que es indeterminado.*

Paso 2: Primer factor del producto de factores (el no factorizable); se *ubica abajo por lo tanto se subirá, colocándose como el primer factor.*

Paso 3: Segundo factor del producto de factores; *aquí se busca el segundo factor, puede hacer la división*

$$-x + 3 \;\overline{)\,-3x^2 + 6x + 9} = 3x + 3$$

Otra opción es buscar el número que multiplicado por el primer valor +3 da el tercer término del ejercicio +9, resultando +3

Problema resuelto

Obtener el valor del límite $\lim_{x\to -1} \dfrac{-3x^2 + 2x + 5}{x + 1} =$

Respuesta

$$\lim_{x\to -1} \frac{-3x^2 + 2x + 5}{x + 1} = \frac{-3[-1]^2 + 2[-1] + 5}{[-1] + 1} = \frac{0}{0}$$

El primer factor

$$\lim_{x\to -1} \frac{-3x^2 + 2x + 5}{x + 1} = \frac{(x + 1)(\quad)}{x + 1}$$

El faltante

$$\lim_{x\to -1} \frac{-3x^2 + 2x + 5}{x + 1} = \frac{(x + 1)(\quad)}{x + 1}$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{-3x^2 + 2x + 5}{x + 1} = \frac{\cancel{(x + 1)}(-3x + 5)}{\cancel{x + 1}} = -3x + 5$$

$$= -3(-1) + 5 = 8$$

Paso 1: Sustituir el valor a que tiende "*x*"; al resolverlo observamos que es indeterminado.

Paso 2: Primer factor del producto de factores (el no factorizable); se ubica abajo por lo tanto se subirá, colocándose como el primer factor.

Paso 3: Segundo factor del producto de factores; *aquí se busca el segundo factor, puede hacer la división*

$$x + 1 \;\overline{)\,-3x^2 + 2x + 5} = -3x + 5$$

Otra opción es buscar el número que multiplicado por el primer valor +1 da el tercer término del ejercicio +5, resultando +5

3.6 Límites que tienden a cero en funciones polinomiales

Para dar solución a un problema que tiende a cero en un límite polinomial se recomiendan los siguientes pasos:

Paso 1: Ubicar la menor potencia, para dividir toda la función entre esa potencia

Los ejercicios se presentan en una fracción algebraica en donde habrá distintos exponentes (potencias cuadráticas, cúbicas, a la quinta, etc.) pero para dar solución cuando $x \to 0$ cada término del polinomio debe dividirse entre la ***menor potencia***.

Paso 2: Simplificación de la función

Para obtener el resultado, se realiza la división de cada término pudiéndose presentar dos posibles resultados:

- Al dividir potencias del mismo exponente estas se eliminen quedando solo sus coeficientes.
- Al dividir la potencia mayor entre la menor, esta no se elimine, pero al nuevamente evaluarse su resultado será cero; ya que todo número multiplicado por cero es cero.

Paso 3: La solución

Potencia iguales tanto en el numerador como en el denominador	Potencia menor en el numerador	Potencia menor en el denominador
El resultado estará dado por el valor de ambos	El resultado será infinito	El resultado será cero

Alerta

Cuando sea un límite polinomial y *x* tienda a cero; todo el límite se dividirá entre la menor potencia del ejercicio.

Problema resuelto

$$\lim_{x \to 0} \frac{4x + 8x^2}{3x^6 + 2x}$$

Respuesta

$$\lim_{x \to 0} \frac{4x + 8x^2}{3x^6 + 2x}$$

Paso 1: Ubicar la menor potencia, para dividir toda la función entre esa potencia; aquí la menor es *x*.

$$\frac{\frac{4x}{x} + \frac{8x^2}{x}}{\frac{3x^6}{x} + \frac{2x}{x}} = \frac{4 + 8x}{3x^5 + 2}$$

Paso 2: Simplificar la función;

$4x$ *dividiéndose entre* x *es* 4	Se eliminan las *x*
$8x^2$ *dividiéndose entre* x *es* $8x$	No se eliminan todas las *x*

Y de la misma naturaleza los demás términos.

Como "x" tiende a "0" al sustituir el valor a que el límite tiende se obtiene su resultado.

$$\lim_{x \to 0} \frac{4 + 8[0]}{3[0]^5 + 2} = \frac{4}{2} = 2$$

Paso 3: La solución; potencias menores iguales tanto en el numerador como en el denominador, el resultado es el valor de ambos $\frac{4}{2}$

Problema resuelto

$$\lim_{x\to 0} \frac{3+2x}{4x^3+3x^2}$$

Respuesta

$$\lim_{x\to 0} \frac{3+2x}{4x^3+3x^2}$$

Potencia menor en el numerador

Paso 1: Ubicar la menor potencia, para dividir toda la función entre esa potencia; aquí la menor es x.

$$\frac{\frac{3}{x}+\frac{2x}{x}}{\frac{4x^3}{x}+\frac{3x^2}{x}} = \frac{\frac{3}{x}+2}{4x^2+3x}$$

Paso 2: Simplificar la función;

3 al dividirse entre x es $\frac{3}{x}$

$2x$ al dividirse entre x es **2**. Se eliminan las x.

$4x^3$ y $3x^2$ al dividirse entre x presentará sobrantes.

Después de simplificar se evalúa nuevamente; recuerda en este caso las equis son evaluadas a cero.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{[0]}+2}{4[0]^2+3[0]} = \frac{\infty+2}{0} = \frac{\infty}{0} = \infty$$

Paso 3: La solución; como el ejercicio presenta la menor potencia en el numerador, el resultado es infinito, presentándose un límite Determinado del tipo:

$$\frac{\infty}{0} = \infty$$

Problema resuelto

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^3-8x^2}{2+3x}$$

Respuesta

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^3-8x^2}{2+3x}$$

Potencia menor en el denominador

Paso 1: Ubicar la menor potencia, para dividir toda la función entre esa potencia; aquí la menor es x.

$$\frac{\frac{3x^3}{x}-\frac{8x^2}{x}}{\frac{2}{x}+\frac{3x}{x}} = \frac{3x^2-8x}{\frac{2}{x}+3}$$

Paso 2: Simplificar la función;
Tanto $3x^3$ como $8x^2$ al dividirse entre x presentará sobrantes.

En el caso de 2 al dividirse entre x el resultado es $\frac{2}{x}$

En el caso de $3x$ al dividirse entre x, se eliminan las x.

Después de simplificar se evalúa nuevamente; recuerda en este caso las equis son evaluadas a cero.

$$\lim_{x\to 0} \frac{3[0]^2-8[0]}{\frac{2}{[0]}+3} = \frac{0}{\infty+3} = \frac{0}{\infty} = 0$$

Paso 3: La solución; como el ejercicio presenta la menor potencia en el denominador, el resultado es cero, presentándose un límite Determinado del tipo:

$$\frac{0}{\infty} = 0$$

Alerta

El límite de un cociente de polinomios que tiende a cero debe dividirse entre la menor potencia.

3.7 Límites que tienden a infinito en funciones polinomiales

Para dar solución a un problema que tiende a infinito en un límite polinomial se recomiendan los siguientes pasos:

Paso 1: Ubicar la mayor potencia, para dividir toda la función entre esa potencia

Los ejercicios se presentan en una fracción algebraica en donde habrá distintos exponentes (potencias cuadráticas, cúbicas, a la quinta, etc.) pero para dar solución cuando $x \to \infty$ cada término del polinomio debe dividirse entre la ***mayor potencia***.

Paso 2: Simplificación de la función

Para obtener el resultado, se realiza la división de cada término pudiéndose presentar dos posibles resultados:

- Al dividir potencias del mismo exponente estas se eliminen quedando solo sus coeficientes.
- Al dividir la potencia menor entre la mayor, esta no se elimine, presentándose como resultado una fracción, que al nuevamente ser evaluada será eliminada.

Paso 3: La solución

Potencias iguales tanto en el numerador como en el denominador	Potencia mayor en el numerador	Potencia mayor en el denominador
↓	↓	↓
El resultado estará dado por el valor de ambos	El resultado será infinito	El resultado será cero

Alerta

Cuando sea un límite polinomial y x tienda a infinito; todo el límite se dividirá entre la mayor potencia del ejercicio.

Problema resuelto

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3 + 8x^2}{3x^3 + 2x}$$

Respuesta

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3 + 8x^2}{3x^3 + 2x}$$

Paso 1: Ubicar la Mayor potencia, para dividir toda la función entre esa potencia; aquí la mayor es x^3.

$$\frac{\frac{4x^3}{x^3} + \frac{8x^2}{x^3}}{\frac{3x^3}{x^3} + \frac{2x}{x^3}} = \frac{4 + \frac{8}{x}}{3 + \frac{2}{x^2}}$$

Paso 2: Simplificar la función;

$4x^3$ y $3x^3$ dividiéndose entre x^3 es **4** y **3**, respectivamente.

$8x^2$ dividiéndose entre x^3 es $\mathbf{\frac{8}{x}}$

$2x$ dividiéndose entre x^3 es $\mathbf{\frac{2}{x^2}}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4 + \frac{8}{[\infty]}}{3 + \frac{2}{[\infty]^2}} = \frac{4+0}{3+0} = \frac{4}{3}$$

Paso 3: La solución; potencias mayores iguales tanto en el numerador como en el denominador, el resultado es el valor de ambos $\frac{4}{3}$

Problema resuelto

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3 - 8x^2}{3x + 2}$$

Respuesta

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3 - 8x^2}{3x + 2}$$

Potencia mayor en el numerador

Paso 1: Ubicar la Mayor potencia, para dividir toda la función entre esa potencia; aquí la mayor es x^3.

$$\frac{\frac{3x^3}{x^3} - \frac{8x^2}{x^3}}{\frac{3x}{x^3} + \frac{2}{x^3}} = \frac{3 - \frac{8}{x}}{\frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}}$$

Paso 2: Simplificar la función;

En el caso de $3x^3$ al dividirse entre x^3, se eliminan las x.

En el caso de $8x^2$, $3x$, 2 al dividirse entre x^3 habrá sobrantes que se presentarán en fracciones.

Después de simplificar y evaluar nuevamente a infinito los coeficientes con equis serán eliminados.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3 - \frac{8}{[\infty]}}{\frac{3}{[\infty]^2} + \frac{2}{[\infty]^3}} = \frac{3 - 0}{0 + 0} = \frac{3}{0} = \infty$$

Paso 3: La solución; como el ejercicio presenta la mayor potencia en el numerador, el resultado es infinito, presentándose un límite Determinado del tipo:

$$\frac{\#}{0} = \infty$$

Problema resuelto

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x + 3}{4x^3 + 3x^2}$$

Respuesta

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x + 3}{4x^3 + 3x^2}$$

Potencia mayor en el denominador

Paso 1: Ubicar la Mayor potencia, para dividir toda la función entre esa potencia; aquí la mayor es x^3.

$$\frac{\frac{2x}{x^3} + \frac{3}{x^3}}{\frac{4x^3}{x^3} + \frac{3x^2}{x^3}} = \frac{\frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}}{4 + \frac{3}{x}}$$

Paso 2: Simplificar la función;

En el caso de $2x$, 3, $3x^2$ al dividirse entre x^3 se obtendrán sobrantes que se presentarán en fracciones.

En $4x^3$ al dividirse entre x^3, se eliminan las x.

Después de simplificar y evaluar nuevamente a infinito los coeficientes con equis serán eliminados.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{[\infty]^2} + \frac{3}{[\infty]^3}}{4 + \frac{3}{[\infty]}} = \frac{0 + 0}{4 + 0} = \frac{0}{4} = 0$$

Paso 3: La solución; como el ejercicio presenta la mayor potencia en el denominador, el resultado es cero, presentándose un límite Determinado del tipo:

$$\frac{0}{\#} = 0$$

Alerta

El límite de un cociente de polinomios que tiende a infinito debe dividirse entre la mayor potencia.

3.8 Aplicaciones de los límites

Para dar solución a un problema en aplicación de límites se deben buscar valores que se acerquen al resultado que buscamos, al basarnos en el planteamiento realizado.

Problema resuelto

Un empresario sabe que la ecuación de producción de su artículo perro (matriz. Portafolio de productos), denominado así por ser el de menor demanda, se representa por la ecuación $C_t = 0.6x^2 - 18x + 150$ donde se observa la parte variable y fija del problema, si el empresario no desea retirar el artículo en cuestión, ¿cuántas unidades como límite debe producir, para cubrir sus costos y cuántas veces debe realizarse el ciclo de producción, si la máquina en cada proceso produce 4 unidades?

Respuesta

$$C_t = C_v(x) + C_f$$
$$C_t = 0.6(4)^2 - 18(4) + 150 = 87.60$$
$$C_t = 0.6(8)^2 - 18(8) + 150 = 44.40$$
$$C_t = 0.6(12)^2 - 18(12) + 150 = 20.40$$
$$C_t = 0.6(16)^2 - 18(16) + 150 = 15.60$$
$$C_t = 0.6(20)^2 - 18(20) + 150 = 30.00$$

Como el proceso de producción es cada cuatro unidades, tomaremos los intervalos para conocer en qué momento los costos se presentan mínimos.

Como se observa el mínimo costo de producción se establece en 4 ciclos de producción, pudiéndose presentar la recuperación con 13, 14, 15 o 16 unidades.

Comprobando tenemos:

$$C_t = C_v(x) + C_f$$
$$C_t = 0.6(13)^2 - 18(13) + 150 = 17.40$$
$$C_t = 0.6(14)^2 - 18(14) + 150 = 15.60$$
$$C_t = 0.6(15)^2 - 18(15) + 150 = 15.00$$
$$C_t = 0.6(16)^2 - 18(16) + 150 = 15.60$$

El costo mínimo se obtiene con 15 unidades, como 15 es el límite, con una unidad adicional tendremos un beneficio.

Comprobando tenemos:

$$\lim_{x\to 15} \frac{C - C(15)}{x - 15} =$$

$$\lim_{x\to 15} \frac{0.6x^2 - 18x + 150 - (15)}{x - 15} =$$

$$\lim_{x\to 15} \frac{0.6x^2 - 18x + 135}{x - 15} =$$

$$\lim_{x\to 15} \frac{0.6(x^2 - 30x + 225)}{x - 15} =$$

$$\lim_{x\to 15} \frac{0.6(x - 15)(x - 15)}{x - 15} = 0.6(x - 15)$$

$$0.6(15 - 15) = 0.6(0) = 0$$

$$\lim_{x\to 16} \frac{C - C(16)}{x - 16} =$$

$$\lim_{x\to 16} \frac{0.6x^2 - 18x + 150 - (15.6)}{x - 16} =$$

$$\lim_{x\to 16} \frac{0.6x^2 - 18x + 134.4}{x - 16} =$$

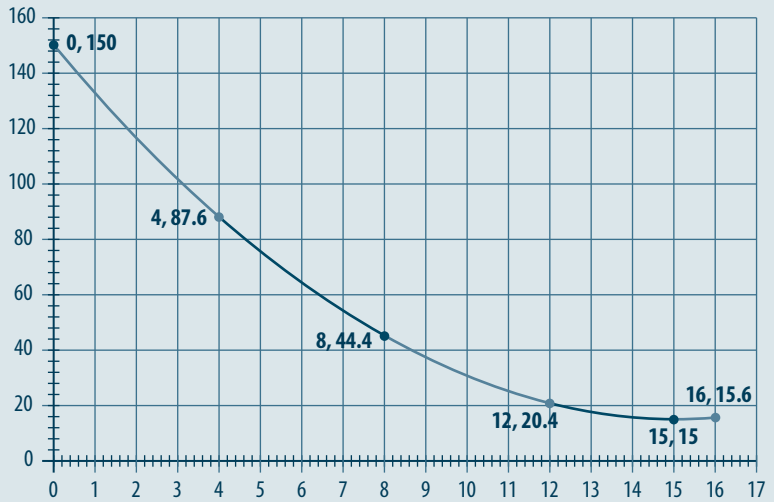
$$\lim_{x\to 16} \frac{0.6(x^2 - 30x + 224)}{x - 16} =$$

$$\lim_{x\to 16} \frac{0.6(x - 16)(x - 14)}{x - 16} = 0.6(x - 14)$$

$$0.6(16 - 14) = 0.6(2) = 1.20$$

Al producir la máquina 4 piezas por operación, esta debe realizar su ciclo en cuatro ocasiones para que recupere costos y obtenga un beneficio.

Respuesta (*continuación*)



En la gráfica se puede observar que con 16 unidades empieza a crecer.

Problema resuelto

En una empresa el costo total es $C_t = x^2 - 30x + 800$ donde x representa las unidades de producción y C_t el costo total de producirlo.

Si se desea minimizar el costo. ¿Cuál es el límite de producción a fin de no obtener pérdida en la producción?

Respuesta

Como se desea minimizar el costo y la ecuación presenta un cuadrado, podemos optar por utilizar la forma canónica de la parábola; para encontrar unidades al mínimo costo.

$$C = x^2 - 30x + 800$$

$$-x^2 + 30x = -C + 800$$

$$\frac{-x^2 + 30x = -C + 800}{-1}$$

$$x^2 - 30x = 1C - 800$$

Paso 1: Separación de términos; la variable elevada al cuadrado a la izquierda y a la derecha la otra variable, aquí la otra variable es Costo.

Paso 2: Identificación del término lineal; aquí es -30.

$$x^2 - 30x \_\_\_\_\_ = C - 800$$

$$x^2 - 30x + 225 = C - 800 + 225$$

Paso 3: Completando el trinomio cuadrado perfecto;

el *valor* de -30 se divide entre dos y su resultado se eleva al cuadrado.

$\left(\frac{-30}{2}\right) = [-15]^2 = 225$ agregándose a ambos lados de la igualdad para no alterar la ecuación.

$$x^2 - 30x + 225 = C - 575$$

$$(x - 15)^2 = 1(C - 575)$$

Paso 4: La factorización.

Se observa que 15 unidades representan el costo mínimo, por tanto el límite de producción serán 15 unidades, ya que con una menor cantidad, no se recuperaría el costo.

Respuesta (*continuación*)

Comprobando

$C_t = C_v(x) + C_f$

$C_t = x^2 - 30x + 800$

$C_t = (14)^2 - 30(14) + 800 = 576$

$C_t = (15)^2 - 30(15) + 800 = 575$

$C_t = (16)^2 - 30(16) + 800 = 576$

Como se observa el mínimo costo de producción se establece con 15 artículos fabricados.

$$\lim_{x \to 15} \frac{C - C(15)}{x - 15} =$$

$$\lim_{x \to 15} \frac{x^2 - 30x + 800 - [575]}{x - 15} =$$

$$\lim_{x \to 15} \frac{x^2 - 30x + 225}{x - 15} =$$

$$\lim_{x \to 15} \frac{(x - 15)(x - 15)}{x - 15} = (x - 15) = (15 - 15) = 0$$

Por lo tanto, como 15 es el límite, con una unidad adicional se obtendrá beneficio.

$$\lim_{x \to 16} \frac{C - C(16)}{x - 16} =$$

$$\lim_{x \to 16} \frac{x^2 - 30x + 800 - [576]}{x - 16} =$$

$$\lim_{x \to 16} \frac{x^2 - 30x + 224}{x - 16} =$$

$$\lim_{x \to 16} \frac{(x - 16)(x - 14)}{x - 16} = (x - 14) = (16 - 14) = 2 \text{ pesos/unidad}$$

El límite de 2 pesos/unidad es a lo que se conoce como costo marginal de producción.

Problema resuelto

En una industria el costo anual total es $C_t = 0.125x^2 - 700x + 1\,150\,000$ donde x representa las unidades de producción y C_t el costo total de producirlo.

La empresa actualmente busca integrar ese costo en fronteras de producción, trabajando al mínimo costo posible, aunado a los problemas económicos que actualmente rigen los mercados nacionales e internacionales, por ello solicita saber, ¿cuál debe establecerse como su límite de producción?

Respuesta

Como se desea minimizar el costo y la ecuación presenta un cuadrado, como sabemos podemos utilizar la forma canónica de la parábola, o podemos optar también por obtenerlo por medio del cálculo del vértice de una curva; tema visto en la unidad anterior.

Como se vio en la unidad anterior toda función cuadrática puede graficarse, su representación será una curva y el punto más alto o más bajo es el vértice de la misma.

El vértice de la curva se obtiene al calcular el punto coordenado $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ $\begin{matrix}(x, & y)\end{matrix}$

Respuesta (*continuación*)

El costo anual total es: $0.125x^2 - 700x + 1\,150\,000$

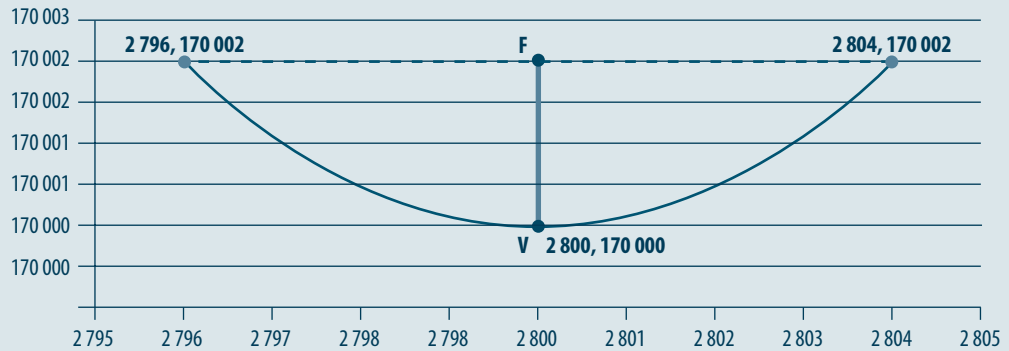
$a = 0.125$

$b = -700$

$c = 1\,150\,000$

$$\left(\frac{-(-700)}{2(0.125)}, \frac{4(0.125)(1150\,000) - (-700)^2}{4(0.125)}\right) = \begin{pmatrix} x & y \\ 2\,800, & 170\,000 \end{pmatrix}$$

Al graficar el punto mínimo se observa lo siguiente:



En la gráfica puede apreciarse que el punto más bajo, es el punto calculado en el vértice.

Para que pueda apreciarse de las dos maneras aquí está la opción por canónica.

$$C = 0.125x^2 - 700x + 1\,150\,000$$

$$-0.125x^2 + 700x = -C + 1\,150\,000$$

$$\frac{-0.125x^2 + 700x = -C + 1\,150\,000}{-0.125}$$

$$x^2 - 5\,600x = 8C - 9\,200\,000$$

$$x^2 - 5\,600x \_\_\_\_\_ = 8C - 9\,200\,000$$

$$x^2 - 5\,600x + 7\,840\,000 = 8C - 9\,200\,000 + 7\,840\,000$$

$$x^2 - 5\,600x + 7\,840\,000 = 8C - 1\,360\,000$$

$$\sqrt{\quad} \qquad \sqrt{\quad} \qquad \div$$

$$(x - 2\,800)^2 = 8(C - 170\,000)$$

Como el mínimo es 2 800 artículos fabricados, con unidades adicionales habrá beneficio.

$$\lim_{x \to 2\,804} \frac{C - C(2\,804)}{x - 2\,804} =$$

$$\lim_{x \to 2\,804} \frac{0.125x^2 - 700x + 1150\,000 - [170\,002]}{x - 2\,804} =$$

$$\lim_{x \to 2\,804} \frac{0.125x^2 - 700x + 979\,998}{x - 2\,804} =$$

$$\lim_{x \to 2\,804} \frac{0.125(x^2 - 5\,600 + 7\,839\,984)}{x - 2\,804}$$

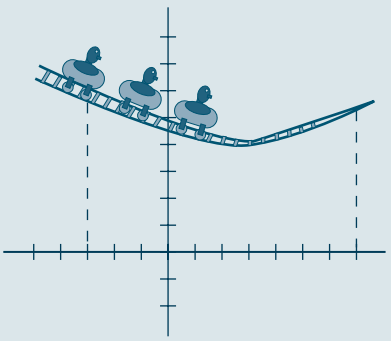
$$\lim_{x \to 2\,804} \frac{0.125(x - 2\,804)(x - 2\,796)}{x - 2\,804} = 0.125(x - 2\,796) = 0.125(2\,804 - 2\,796) = 1$$

El límite de 1 peso/unidad es a lo que llamamos Costo Marginal.

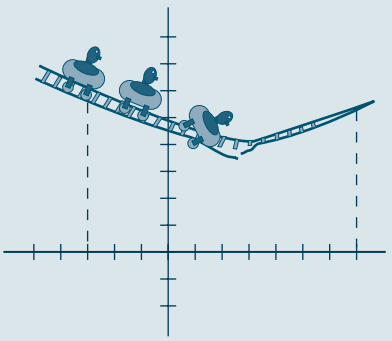
3.9 Continuidad

Se dice que una función es continua cuando no presenta brechas, saltos, interrupciones o rompimientos; en esencia, una función es continua si su gráfica es una línea seguida y no interrumpida.

Una continuidad es una línea seguida que no presenta brechas o rompimientos tal es el caso de la siguiente figura donde se puede apreciar que no hay interrupciones en el riel de la montaña rusa.



Al presentarse una brecha o un rompimiento no se habla de continuidad sino de discontinuidad tal es el caso de la siguiente figura donde se puede apreciar que existe un rompimiento o una fractura en el riel.



Matemáticamente para saber si una función es continua en un punto se deben cumplir las tres condiciones siguientes:

3.10 Condiciones de continuidad

Para saber si una función es continua o no deben observarse las siguientes condiciones:

Primera condición	Debe existir y estar definida	$f(a)$
Segunda condición	Debe existir el límite	$\lim_{x \to a} f(x)$
Tercera condición	Deben ser iguales para tener continuidad	$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Alerta

Cuando no se cumpla algunas de las tres condiciones; la función no será continua.

Si no se cumple alguna de las condiciones anteriores, se dice que la función no es continua en $x = a$, por tanto la función será discontinua.

La discontinuidad en funciones algebraicas fraccionarias, se presentará en cocientes, lográndose la discontinuidad cuando el denominador del cociente se hace cero.

Una manera fácil para conocer si una función es continúa o no, es a través del uso de los límites laterales y para ello se proponen los siguientes pasos.

3.11 Continuidad o discontinuidad de funciones

Paso 1: Ubicar el valor a para sustituirlo en f(a)

El valor de a es el calculado en $f(a)$ usando para ello los intervalos de definición de la función; el valor de las desigualdades.

Paso 2: Verificar si existe el lím (solución y evaluación)

Al evaluar y dar solución se busca obtener el resultado del límite para comparar su resultado con el paso 1 y saber si la función en ese punto es continua o discontinua.

Alerta

Para verificar si una función es continua o no podrá evaluarse, recuerda por izquierda es con valores menores por derecha valores mayores.

Paso 3: La igualación (Continuidad o Discontinuidad)

Al comparar se sabrá si hay continuidad o discontinuidad.

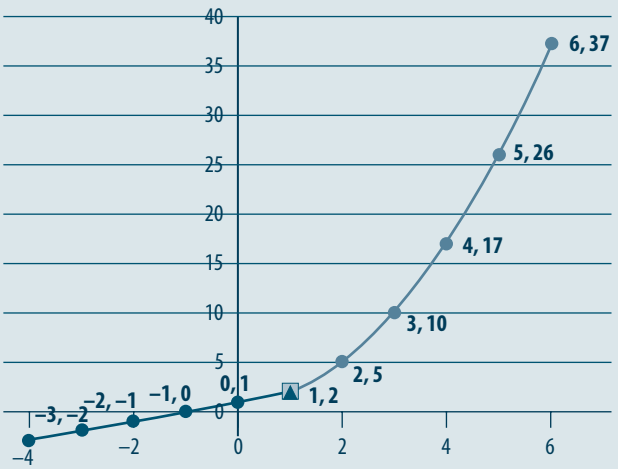
Problema resuelto

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & x \leq 1 \\ x^2 + 1 & x > 1 \end{cases}$$

Respuesta

$a = 1$

Al sustituir se obtiene:	Al evaluar se obtiene:
$f(a) = x + 1$	$\lim\limits_{x \to a} = x^2 + 1$
$(1) + 1 = 2$	$(1)^2 + 1 = 2$



Paso 1: Ubicar el valor a para sustituirlo, aquí $a = 1$.

Recuerda que cuando x tiende por la izquierda es $x < a$ y cuando tiende por la derecha es $x > a$.

Razón por lo cual ordenamos una parte a la izquierda y otra a la derecha.

Paso 2: Verificar si existe el Lím; evaluamos sustituyendo en cada x el valor del Lím.

Paso 3: La igualación; como **2** es igual a **2** la función es continua.

Aquí $\boldsymbol{f(a)}$ *es igual a* $\lim\limits_{x \to a} \boldsymbol{f(x)}$

En la gráfica puedes observar que la recta de la izquierda es continua con la parábola de la derecha.

Menores que	Mayores que
$(0) + 1 = 1$	$(2)^2 + 1 = 5$
$(-1) + 1 = 0$	$(3)^2 + 1 = 10$
$(-2) + 1 = -1$	$(4)^2 + 1 = 17$

Para graficar tabulamos asignando valores de acuerdo al sentido de la desigualdad teniendo presente que:

Por la izquierda son valores menores que $a (x < a)$.

Por la derecha son valores mayores que $a (x > a)$.

Problema resuelto

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 & x \leq -1 \\ x + 2 & x > -1 \end{cases}$$

Respuesta

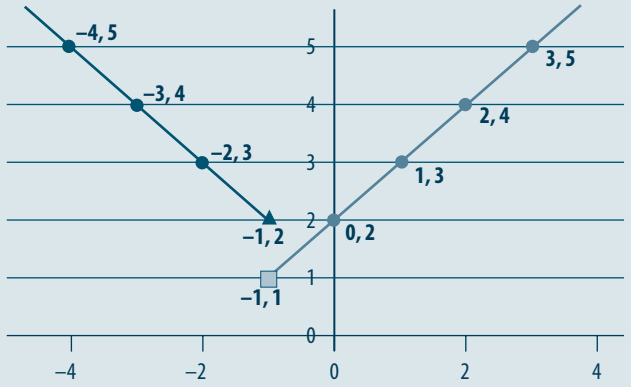
$a = -1$

Al sustituir se obtiene:	Al evaluar se obtiene:
$f(a) = -x + 1$	$\lim\limits_{x \to a} = x + 2$
$-(-1) + 1 = 2$	$(-1) + 2 = 1$

Paso 1: Ubicar el valor a para sustituirlo, aquí $a = -1$.

Paso 2: Verificar si existe el Lím; evaluamos sustituyendo en cada x el valor del Lím.

Respuesta (*continuación*)



Paso 3: La igualación; como **2** es distinto de **1** la función es discontinua.

Aquí ***f(a)*** *no es igual a* $\lim_{x \to a} f(x)$

En la gráfica puedes observar la discontinuidad.

Recuerda que cuando x tiende por la izquierda es $x < a$ y cuando tiende por la derecha es $x > a$.

Alerta

Cuando la gráfica no es una línea continua hay discontinuidad.

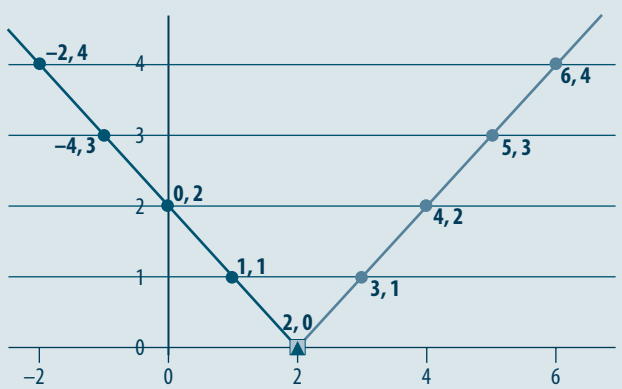
Problema resuelto

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 & x \leq 2 \\ x - 2 & x > 2 \end{cases}$$

Respuesta

$a = 2$

Al sustituir se obtiene:	Al evaluar se obtiene:
$f(a) = -x + 2$	$\lim_{x \to a} = x - 2$
$-(2) + 2 = 0$	$(2) - 2 = 0$



Paso 1: Ubicar el valor a para sustituirlo, aquí $a = 2$

Paso 2: Verificar si existe el Lím; evaluamos sustituyendo en cada x el valor del Lím.

Paso 3: La igualación; como **0** es igual a **0** la función es continua.

Aquí ***f(a)*** *es igual a* $\lim_{x \to a} f(x)$

En la gráfica puedes observar la continuidad.

Recuerda que cuando x tiende por la izquierda es $x < a$ y cuando tiende por la derecha es $x > a$.

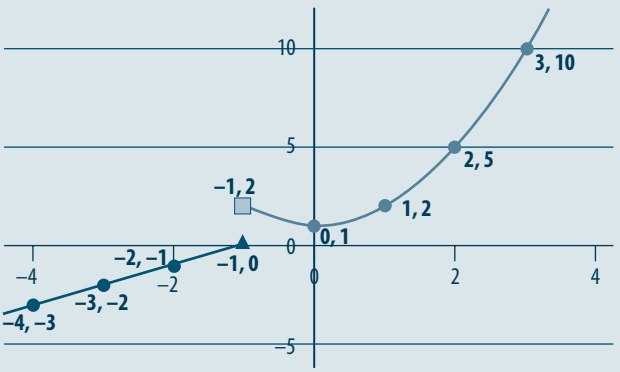
Problema resuelto

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & x \leq -1 \\ x^2 + 1 & x > -1 \end{cases}$$

Respuesta

$a = -1$

Al sustituir se obtiene:	Al evaluar se obtiene:
$f(a) = x + 1$	$\lim\limits_{x \to a} = x^2 + 1$
$(-1) + 1 = 0$	$(-1)^2 + 1 = 2$



Paso 1: Ubicar el valor a para sustituirlo, aquí $a = -1$

Paso 2: Verificar si existe el Lím; evaluamos sustituyendo en cada x el valor del Lím.

Paso 3: La igualación; como **0** es distinto de **2** la función es discontinua.

Aquí $f(a)$ *no es igual a* $\lim\limits_{x \to a} f(x)$

En la gráfica puedes observar la discontinuidad.

Recuerda que cuando x tiende por la izquierda es $x < a$ y cuando tiende por la derecha es $x > a$.

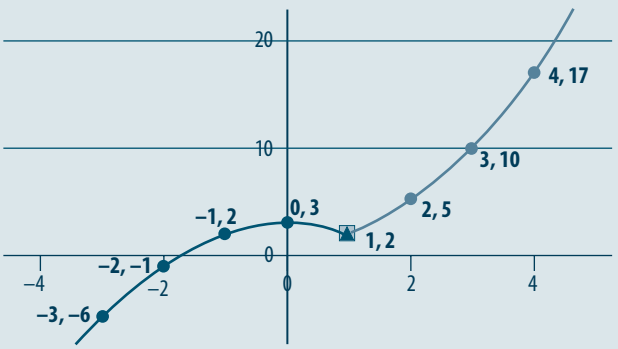
Problema resuelto

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3 & x \leq 1 \\ x^2 + 1 & x > 1 \end{cases}$$

Respuesta

$a = 1$

Al sustituir se obtiene:	Al evaluar se obtiene:
$f(a) = -x^2 + 3$	$\lim\limits_{x \to a} = x^2 + 1$
$-(1)^2 + 3 = 2$	$(1)^2 + 1 = 2$



Paso 1: Ubicar el valor a para sustituirlo, aquí $a = 1$

Paso 2: Verificar si existe el Lím; evaluamos sustituyendo en cada x el valor del Lím.

Paso 3: La igualación; como **2** es igual que **2** la función es continua.

Aquí $f(a)$ *es igual a* $\lim\limits_{x \to a} f(x)$

En la gráfica puedes observar la continuidad.

Recuerda que cuando x tiende por la izquierda es $x < a$ y cuando tiende por la derecha es $x > a$.

Problemas para resolver

Obtener el valor de los siguientes límites.

3.1 $\lim_{x\to 3}(x^2 + 9x - 27)$

3.2 $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2 + 4x - 5}{x + 5}$

3.3 $\lim_{x\to -3}\dfrac{x + 3}{x^2 + 4x + 3}$

3.4 $\lim_{x\to 0}(x^2 + x - 7)$

3.5 $\lim_{x\to 0}\dfrac{x - 2}{x - 5}$

3.6 $\lim_{x\to 6}\dfrac{5(x^2 - 11x + 30)}{x - 6}$

3.7 $\lim_{x\to 1}\dfrac{1}{(1 - x)^3}$

3.8 $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

3.9 $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

3.10 $\lim_{x\to -1}\dfrac{5x^2 + 6x - 11}{x - 1}$

3.11 $\lim_{x\to 3}\left(\dfrac{\sqrt{x^2} + \sqrt{3x}}{x + 2}\right)$

3.12 $\lim_{x\to 6}\dfrac{x^2 + 4x - 12}{x - 2}$

3.13 $\lim_{x\to 6}\dfrac{x^2 + 4x - 12}{x + 6}$

3.14 $\lim_{x\to 6}\dfrac{x^2 + 4x - 12}{x + 6} + 6$

3.15 $\lim_{x\to 2}\dfrac{x + 1}{-3x^2 + 4x + 7}$

3.16 $\lim_{x\to 5}\dfrac{-3x^2 + 8x + 11}{-3x + 11}$

3.17 $\lim_{x\to 1}\dfrac{12x^2 + 6x - 18}{3x - 3}$

3.18 $\lim_{x\to 0}\dfrac{3x^2 + 5x + 22}{-3x + 11}$

3.19 $\lim_{x\to 1}\dfrac{-3x^2 + 5x + 12}{3x + 4}$

3.20 $\lim_{x\to 1}\dfrac{3x^2 + x - 2}{x + 1}$

3.21 $\lim_{x\to 0}\left(2 + \dfrac{1}{x^2}\right)$

3.22 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2 + 9} - 4}{2}$

3.23 $\lim_{x\to 0}\dfrac{5x^2 - 3x^4}{4x^3 + 3x^2}$

3.24 $\lim_{x\to 0}\dfrac{4x^3 - 6x^4}{4x^4 - 2x^3}$

3.25 $\lim_{x\to 0}\dfrac{4x^3 - 3x^2 + 7x}{2x^3 + 3x^2 - 3x}$

3.26 $\lim_{x\to 0}\dfrac{2x^3 + 3x^2}{4x^3 + 3x}$

3.27 $\lim_{x\to \infty}\dfrac{5x^2 - 3x^4}{4x^3 + 3x^2}$

3.28 $\lim_{x\to \infty}\dfrac{4x^3 - 6x^4}{4x^4 - 2x^3}$

3.29 $\lim_{x\to \infty}\dfrac{4x^3 - 3x^2 + 7x}{2x^3 + 3x^2 - 3x}$

3.30 $\lim_{x\to \infty}\dfrac{2x^2 + 3x}{4x^3 + 3x}$

3.31 $\lim_{x\to \infty}\dfrac{2x^2 + 8x^3}{4x^3 + x}$

3.32 $\lim_{x\to -1}\dfrac{5x^2 + 10x + 5}{x + 1}$

3.33 $\lim_{x\to -1}\dfrac{4x^2 + 8x + 4}{4x + 4}$

3.34 $\lim_{x\to -7}\dfrac{x^2 + 10x + 21}{x + 7}$

3.35 $\lim_{x\to 1}\dfrac{-8x^2 + 5x + 3}{-x + 1}$

3.36 $\lim_{x\to -1}\dfrac{5x^2 + 10x + 5}{5x + 5}$

3.37 $\lim_{x\to -1}\dfrac{4x^2 + 8x + 4}{x + 1}$

3.38 $\lim_{x\to -1}\dfrac{2x^2 + 4x + 2}{2x + 2}$

SR Problemas aplicados a la realidad T Problemas para resolver con tecnología

3.39 $\lim_{x \to -6} \dfrac{x^2 + 10x + 24}{x + 6}$

3.40 $\lim_{x \to -1} \dfrac{10x^2 + 20x + 10}{x + 1}$

3.41 $\lim_{x \to -1} \dfrac{10x^2 + 20x + 10}{10x + 10}$

3.42 $\lim_{x \to -1} \dfrac{7x^2 + 10x + 3}{7x + 3}$

3.43 Si se tiene la siguiente ecuación $C_t = x^2 - 2x + 3$ indica cuál será el límite de producción para cubrir el costo mínimo

3.44 En una empresa el costo total es $C_t = 20x^2 - 120x + 200$ donde x representa las unidades de producción y C_t el costo al producirlo, si se desea minimizar el costo, ¿cuál es el límite de producción a fin de cubrir sus costos?

3.45 Un industrial sabe que el costo total es: $C_t = 0.01x^2 - 15x + 627\,280$ donde x representa las unidades de producción y C_t el costo total anual, si se busca minimizar el costo, ¿cuántas unidades representarán su límite de producción y cuánto representará su costo marginal?

3.46 Una persona emprende un negocio y obtiene como ecuación de costos lo siguiente: $C_t = \frac{1}{4}x^2 - 3\frac{1}{2}x + \frac{72}{4}$ se pregunta: ¿Cuántas unidades debe fabricar a fin de cubrir el costo de su negocio?

3.47 Un proceso productivo indica que de costos se debe cubrir exactamente la siguiente cantidad en unidades de costo, $C_t = 1x^2 - 10x + 100$ pero se desconoce el número exacto de unidades para realizarlo, por ello los investigadores se preguntan: ¿Cuántas unidades exactamente se obtienen al dar solución?

3.48 En una industria se buscó mediar un costo de producción obteniéndose lo siguiente: $C_t = 0.05x^2 - 0.5x + 55.5$ si se busca minimizarlo, ¿cuál es el costo mínimo?

3.49 En una fábrica el costo total de producción es $C_t = x^2 - 1\,200x + 370\,000$ donde x representa las unidades de producción y C_t el costo total al producirlo, si se desea operar con el costo mínimo, ¿cuál será su límite de producción?

Indica si las siguientes funciones presentan discontinuidad o no

3.50 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{8}{3x+1} & x < 1 \\ 2x^2 + x - 5 & x \geq 1 \end{cases}$

3.51 $f(x) = \begin{cases} 5x^2 + 6 & x < 1 \\ 3x^3 + 5x^2 + 3 & x \geq 1 \end{cases}$

3.52 $f(x) = \begin{cases} -x^3 + 3 & x < 0 \\ x^3 + 1 & x \geq 0 \end{cases}$

3.53 $f(x) = \begin{cases} -x^3 + 3 & x \geq 0 \\ x^2 + 3 & x < 0 \end{cases}$

3.54 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x < 0 \\ x^2 - 2x - 1 & x \geq 0 \end{cases}$

3.55 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1x+1} & x \leq 1 \\ x^2 - x - 0.5 & x > 1 \end{cases}$

3.56 $f(x) = \begin{cases} 3x^3 - 1 & x < 0 \\ 2x^3 - 6x - 1 & x \geq 0 \end{cases}$

3.57 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x < 0 \\ x^2 - 2x - 1 & x \geq 0 \end{cases}$

3.58 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{8}{3x^2+1} & x < 1 \\ \dfrac{2}{3x-2} & x \geq 1 \end{cases}$

PROBLEMAS RETO

Indica el valor a que tiende x en cada uno de los siguientes ejercicios para obtener una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$

1 $\lim\limits_{x \to \square} \dfrac{-2x^2 - 9x + 56}{-2x + 7}$

2 $\lim\limits_{x \to \square} \dfrac{-6x^2 - x + 15}{-2x + 3}$

3 $\lim\limits_{x \to \square} \dfrac{8x^2 - 56x - 30}{4x - 30}$

4 Un doble proceso productivo presenta la siguiente ecuación $2C_t = x^2 - 20x + 300$, indica cuántas serán las unidades límites del proceso productivo.

UNIDAD 4

Las derivadas, la recta tangente, los 4 pasos, los marginales, la aplicación administrativa (Máximos, Mínimos y puntos de Inflexión)

OBJETIVOS

- Identificar la regla de los 4 pasos para derivar.
- Obtener la ecuación de la recta tangente.
- Aplicar las principales reglas de derivación.
- Identificar las distintas reglas de derivación.
- Aplicar la prueba de la primera derivada.
- Aplicar la prueba de la segunda derivada.
- Identificar las distintas aplicaciones administrativas en las derivadas.
- Interpretar los resultados máximos o mínimos obtenidos.

¿QUÉ SABES?

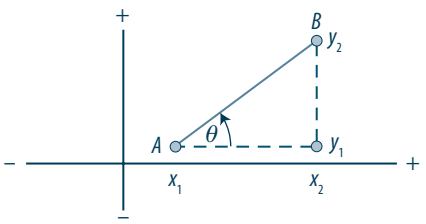
- ¿La pendiente de la recta tangente es la derivada?
- ¿Por la regla de los 4 pasos se obtiene la razón de cambio instantáneo?
- ¿Una función es decreciente cuando x crece y y decrece?
- ¿Cuando la derivada cambia de creciente a decreciente presenta un máximo?
- ¿Cuando la curva queda debajo de sus líneas de tangencia es cóncava hacia abajo?
- ¿Empleando el criterio de la segunda derivada se obtienen máximos y mínimos?
- ¿Los marginales se obtienen derivando?

4.1 Introducción

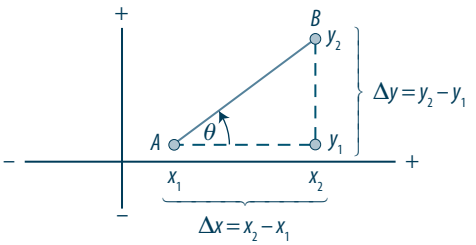
Entiéndase la derivada como la pendiente de la recta tangente, cuando los puntos que la integran se aproximan tan cerca como el límite de sus distancias lo permite, pasando de recta secante (la integrada por los dos puntos) a recta tangente, aproximándose a un valor límite constante.

En el tema de recta se indicó que *m* es la tangente del ángulo de inclinación, definiéndose la pendiente de la recta como la razón de cambio algebraico en incremento o decremento a medida que un punto dado se mueve a lo largo en uno u otro sentido utilizándose la siguiente representación.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{Elevación}}{\text{Desplazamiento}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

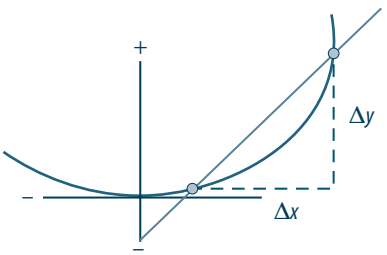


El cambio algebraico en *x* se representa por el símbolo matemático Δx, siendo lo mismo que la diferencia entre $x_2 - x_1$ ubicándose el desplazamiento, presentándose una situación similar para *y* donde el incremento se representa por el símbolo matemático Δy, la diferencia entre $y_2 - y_1$ es la elevación.

Al ser la pendiente de la recta un valor constante, la tasa de cambio de *y* se mantiene constante a todo lo largo de la recta a medida que *x* varía, no sucediendo lo mismo en las curvas, donde conforme el punto inicial o punto de coordenada (x_1, y_1) se mantiene fijo y el punto de coordenada (x_2, y_2) se desliza a lo largo de la curva, el movimiento de desplazamiento producirá a lo largo de la misma distintos valores de pendiente.

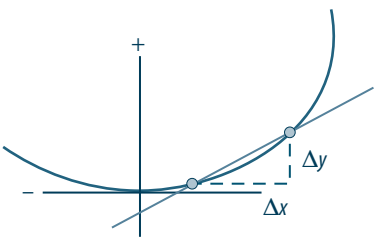
A medida que el límite de las distancias entre el punto fijo inicial (x_1, y_1) se va acortando más y más, el punto coordenado (x_2, y_2) se va aproximando y la pendiente de la recta secante va variando, en cantidades cada vez más y más pequeñas al reducirse la distancia entre los puntos.

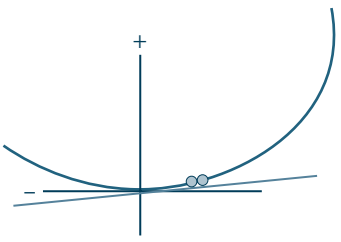
Produciéndose con el acercamiento al límite, la pendiente de la recta tangente a la curva o sea, la pendiente de la curva en (x_1, y_1), por tanto la primera derivada evaluada en un punto dado es igual a la pendiente de la tangente en ese punto.



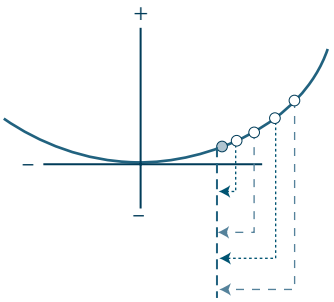
Observa lo que pasa cuando la distancia entre los dos puntos se acorta, la distancia entre los puntos tenderá a cero.

Con forme la distancia entre los dos puntos tiende a cero, el punto de incremento regresa a su estado inicial o punto cero, por tanto la recta secante que los une cambia su inclinación, cambiando así su pendiente.





Cuando la distancia se hace cero, la recta secante se convierte en una tangente de ese punto, presentando cero de pendiente.



Observa el acercamiento de distancias.

Basándonos en esta aproximación de límites obtenemos el punto donde la secante se convierte en la tangente de ese punto.

4.2 Derivada

La derivada es el límite de la razón del incremento de la función al incremento de la variable independiente cuando este último tiende a cero.

Expresando la pendiente de la recta como un cociente de incrementos, tenemos:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Donde x o x_1 representa el punto inicial y Δx representa el incremento de x.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Representación que equivale a ver la pendiente como la fórmula matemática de la razón de cambio promedio.

Entendiéndose la derivada de una función en un punto "a" como:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Recomendándose para obtener la primera derivada el proceso de derivación de los 4 pasos, por las ventajas que presenta pues al usarlo puede obtenerse:

- La razón de cambio promedio o la pendiente de la recta secante

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- La razón de cambio instantánea o la pendiente de la recta tangente

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Obsérvese que la diferencia entre una y otra es la evaluación a cero del límite, por ello al aplicarse la regla de los cuatro pasos primero se obtendrá la razón de cambio promedio y después al aplicar el límite a cero; en la razón de cambio instantáneo obsérvese lo siguiente:

Alerta

La razón de cambio instantáneo es la derivada de una función.

4.3 La derivada por 4 pasos

Como se indicó la derivada es el límite de la razón del incremento de la función al incremento de la variable independiente cuando este último tiende a cero.

Para dar solución a una derivada el primer procedimiento empleado es la regla de los 4 pasos, para obtener la primera derivada de una función, se recomiendan los siguientes 4 pasos:

Paso 1: Incremento de variables y desarrollo de la expresión

En la expresión se debe adicionar a la variable "*x*" un Δx en tanto que a la variable "*y*" le adicionaremos un Δy desarrollando después la expresión obtenida.

Paso 2: Restar la función original

Restaremos a la función incrementada en el paso anterior la función original.

Paso 3: Dividir la función

La función que se obtiene en el paso anterior se debe dividir entre Δx.

Paso 4: Obtener el $\lim_{\Delta x \to 0}$

Evaluamos a cero cada una de las Δx restantes en la función.

Alerta

La derivada por 4 pasos se obtiene al aplicar

$$\lim_{\Delta x \to 0} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

1) Incremento de variables.
2) Restar la función original.
3) Dividir la función.
4) Obtención del lím.

Problema resuelto

Obtener la primera derivada $y = x^2$

Respuesta

$$y + \Delta y = 1[x + \Delta x]^2$$

$$y + \Delta y = 1[x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2]$$

Paso 1: *Incremento de variables y desarrollo de la expresión;*

y se sustituye por $y + \Delta y$

x se sustituye por $x + \Delta x$

$$\begin{array}{rl} & y + \Delta y = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 \\ - & y \qquad = x^2 \\ \hline & / + \Delta y = / \quad + 2x\Delta x \quad + \Delta x^2 \end{array}$$

Paso 2: Restar la función original; *de la expresión desarrollada se resta la original.*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{+2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = +2x \quad + \Delta x$$

Paso 3: Dividir la función; *toda la función se divide entre* Δx *(delta x) eliminándose deltas al multiplicar y dividir, el resultado obtenido la razón de cambio promedio* $\frac{\Delta y}{\Delta x} = +2x + \Delta x$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = +2x \quad +(\text{cero})$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = +2x$$

Paso 4: Obtener el límite cero; *los* Δx *restantes se evalúan a cero, obteniéndose así la razón de cambio instantáneo* $\frac{\Delta y}{\Delta x} = +2x$

La expresión de la recta tangente o la derivada de la función.

Problema resuelto

Obtener la primera derivada $y = 3x^2$

Respuesta

$$y = 3x^2$$

$$y + \Delta y = 3[x + \Delta x]^2$$

Incremento de variables.

Paso 1: Incremento de variables y desarrollo de la expresión; *incrementamos deltas, desarrollamos el cuadrado y realizamos el producto, recuerda:*

y se sustituye por $y + \Delta y$

x se sustituye por $x + \Delta x$

Solución del binomio.

$$y + \Delta y = 3[x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2]$$

El cuadrado del primero más el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.

Solución de la multiplicación.

$$y + \Delta y = 3x^2 + 6x\Delta x + 3\Delta x^2$$

$$\begin{array}{r} y + \Delta y = 3x^2 + 6x\Delta x + 3\Delta x^2 \\ - \quad y \quad\quad = 3x^2 \\ \hline \Delta y = \quad + 6x\Delta x + 3\Delta x^2 \end{array}$$

Restando la función original.

Paso 2: Restar la función original; de *la expresión desarrollada se resta la función original.*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6x\Delta x}{\Delta x} + \frac{3\Delta x^2}{\Delta x}$$

Paso 3: Dividir la función; *toda se divide entre* Δx *(delta x) eliminándose así deltas.*

$$\frac{6x\Delta x}{\Delta x} \quad 6x \qquad \frac{3\Delta x^2}{\Delta x} \quad 3\Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x + 3\Delta x$$

Razón de cambio promedio.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x + 3(\text{cero})$$

Paso 4: Obtener el límite cero; *en la función los* Δx *restantes se evalúan a cero, por ello* $3\,\Delta x$ *se elimina, ya que al ser evaluado resulta cero, la solución* $6x$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x$$

Razón de cambio instantáneo.

El resultado; **la derivada de la función.**

Problema resuelto

Obtener la primera derivada $y = 3x^2 + 2x$

Respuesta

$$y = 3x^2 + 2x$$

$$y + \Delta y = 3[x + \Delta x]^2 + 2[x + \Delta x]$$

Solución del binomio.

$$y + \Delta y = 3[x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2] + 2[x + \Delta x]$$

Solución de las multiplicaciones.

$$y + \Delta y = 3x^2 + 6x\Delta x + 3\Delta x^2 + 2x + 2\Delta x$$

$$\begin{array}{rl} & y + \Delta y = 3x^2 + 6x\Delta x + 3\Delta x^2 + 2x + 2\Delta x \\ - & y \quad\quad = 3x^2 \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 2x \\ \hline & / + \Delta y = / \quad + 6x\Delta x + 3\Delta x^2 \quad / \quad + 2\Delta x \end{array}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6x\Delta x}{\Delta x} + \frac{3\Delta x^2}{\Delta x} + \frac{2\Delta x}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x + 3\Delta x + 2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x + 3(\text{cero}) + 2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x + 2$$

Paso 1: Incremento de variables y desarrollo de la expresión; *incrementamos deltas, desarrollamos el cuadrado y realizamos los productos, recuerda:*

y se sustituye por $y + \Delta y$

x se sustituye por $x + \Delta x$

Paso 2: Restar la función original; de *la expresión desarrollada se resta la función original.*

Paso 3: Dividir la función; *toda se divide entre* Δx *(delta x) eliminándose así las deltas correspondientes.*

Paso 4: Obtener el límite cero; *en la función los* Δx *restantes se evalúan a cero por lo cual se obtiene la solución* $6x + 2$

La derivada de la función.

Problema resuelto

Obtener la primera derivada $y = 3x^2 + 2x + 10$

Respuesta

$$y = 3x^2 + 2x + 10$$

$$y + \Delta y = 3[x + \Delta x]^2 + 2[x + \Delta x] + 10$$

Paso 1: Incremento de variables y desarrollo de la expresión; *incrementamos deltas, desarrollamos el cuadrado y realizamos las multiplicaciones.*

Solución del binomio.

$$y + \Delta y = 3[x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2] + 2[x + \Delta x] + 10$$

Solución de las multiplicaciones.

$$y + \Delta y = 3x^2 + 6x\Delta x + 3\Delta x^2 + 2x + 2\Delta x + 10$$

Respuesta (*continuación*)

$$y + \Delta y = 3x^2 + 6x\Delta x + 3\Delta x^2 + 2x + 2\Delta x + 10$$
$$- \quad y = 3x^2 + 2x + 10$$
$$/ + \Delta y = / + 6x\Delta x + 3\Delta x^2 / + 2\Delta x /$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6x\Delta x}{\Delta x} + \frac{3\Delta x^2}{\Delta x} + \frac{2\Delta x}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x + 3\Delta x + 2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x + 3(\text{cero}) + 2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x + 2$$

Paso 2: Restar la función original; de *la expresión desarrollada se resta la función original.*

Paso 3: Dividir la función; *toda se divide entre* Δx *(delta x) eliminándose así las deltas correspondientes.*

Paso 4: Obtener el límite cero; *en la función los* Δx *restantes se evalúan a cero por lo cual se obtiene la solución*

$$6x + 2$$

La derivada de la función.

Problema resuelto

Obtener la primera derivada $y = -3x^2 - 2x + 0.25$

Respuesta

$$y = -3x^2 - 2x + 0.25$$
$$y + \Delta y = -3[x + \Delta x]^2 - 2[x + \Delta x] + 0.25$$

Solución del binomio.

$$y + \Delta y = -3[x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2] - 2[x + \Delta x] + 0.25$$

Solución de las multiplicaciones.

$$y + \Delta y = -3x^2 - 6x\Delta x - 3\Delta x^2 - 2x - 2\Delta x + 0.25$$

$$y + \Delta y = -3x^2 - 6x\Delta x - 3\Delta x^2 - 2x - 2\Delta x + 0.25$$
$$- \quad y = -3x^2 - 2x + 0.25$$
$$/ + \Delta y = / - 6x\Delta x - 3\Delta x^2 / - 2\Delta x /$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{6x\Delta x}{\Delta x} - \frac{3\Delta x^2}{\Delta x} - \frac{2\Delta x}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -6x - 3\Delta x - 2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -6x - 3(\text{cero}) - 2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -6x - 2$$

Paso 1: Incremento de variables y desarrollo de la expresión; *incrementamos deltas, desarrollamos el cuadrado y realizamos las multiplicaciones.*

Paso 2: Restar la función original; de *la expresión desarrollada se resta la función original.*

Paso 3: Dividir la función; *toda se divide entre* Δx *(delta x) eliminándose así las deltas correspondientes.*

Paso 4: Obtener el límite cero; *en la función los* Δx *restantes se evalúan a cero por lo cual se obtiene la solución*

$$-6x - 2$$

La derivada de la función.

Problema resuelto

Obtener la primera derivada $\boldsymbol{y = \left(x + \frac{1}{2}\right)^3}$

Respuesta

$$y = \left(x + \frac{1}{2}\right)^3$$

$$y = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$$

$$y + \Delta y = [x + \Delta x]^3 + \frac{3}{2}[x + \Delta x]^2 + \frac{3}{4}[x + \Delta x] + \frac{1}{8}$$

$$y + \Delta y = [x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3] + \frac{3}{2}[x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2] + \frac{3}{4}[x + \Delta x] + \frac{1}{8}$$

$$y + \Delta y = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 3x\Delta x + \frac{3}{2}\Delta x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}\Delta x + \frac{1}{8}$$

$$y + \Delta y = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 3x\Delta x + \frac{3}{2}\Delta x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}\Delta x + \frac{1}{8}$$

$$-\quad y = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$$

$$/\ +\Delta y = /\ +3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 \quad /\ +3x\Delta x + \frac{3}{2}\Delta x^2 \quad /\ +\frac{3}{4}\Delta x \quad /$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3x^2\Delta x}{\Delta x} + \frac{3x\Delta x^2}{\Delta x} + \frac{\Delta x^3}{\Delta x} + \frac{3x\Delta x}{\Delta x} + \frac{\frac{3}{2}\Delta x^2}{\Delta x} + \frac{\frac{3}{4}\Delta x}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2 + 3x + \frac{3}{2}\Delta x + \frac{3}{4}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x(\text{cero}) + (\text{cero})^2 + 3x + \frac{3}{2}(\text{cero}) + \frac{3}{4}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x + \frac{3}{4}$$

La derivada de la función.

Empleando la fórmula $\lim_{\Delta x \to 0} = \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ daremos solución a un ejercicio.

Problema resuelto

Obtener la primera derivada $y = 3x^2$

Respuesta

$y = 3x^2$ $\qquad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} = \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Incremento de variables.

$y + \Delta y = 3[x + \Delta x]^2$ $\qquad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} = \dfrac{3(x + \Delta x)^2 - (3x^2)}{\Delta x}$

Solución del binomio.

$y + \Delta y = 3[x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2]$ $\qquad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} = \dfrac{3(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) - (3x^2)}{\Delta x}$

Solución de la multiplicación.

$y + \Delta y = 3x^2 + 6x\Delta x + 3\Delta x^2$ $\qquad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} = \dfrac{3x^2 + 6x\Delta x + 3\Delta x^2 - 3x^2}{\Delta x}$

$$\begin{array}{r} y + \Delta y = 3x^2 + 6x\Delta x + 3\Delta x^2 \\ -\quad y \qquad\quad = 3x^2 \\ \hline \Delta y = \quad + 6x\Delta x + 3\Delta x^2 \end{array}$$

Restando la función original.

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{6x\Delta x}{\Delta x} + \dfrac{3\Delta x^2}{\Delta x}$ $\qquad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} = \dfrac{6x\Delta x + 3\Delta x^2}{\Delta x}$

Razón de cambio promedio.

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 6x + 3\Delta x$ $\qquad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} = 6x + 3\Delta x$

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 6x + 3(\text{cero})$ $\qquad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} = 6x + 3(\text{cero})$

Razón de cambio instantáneo.

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 6x$ $\qquad f'(x) = 6x$

Una de las ventajas de utilizar la regla de los 4 pasos es la obtención de la razón de cambio de una cantidad con relación a otra, el equivalente matemático a ubicar la pendiente de la recta tangente en un punto determinado; un punto cualquiera.

4.4 La pendiente de una recta tangente

La pendiente de la recta tangente en la función en un punto cualquiera está dado por

$$\lim_{x \to 0} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Si este lím existe

Alerta

La derivada por 4 pasos se obtiene al aplicar

$$\lim_{\Delta x \to 0} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

1) Incremento de variables.
2) Restar la función original.
3) Dividir la función.
4) Obtención del lím.

Para dar solución utilizaremos ejercicios ya resueltos.

Para lo cual se recomiendan los siguientes pasos:

Paso 1: Obtención de la primera derivada

Derivar la función original, aplicando el proceso de 4 pasos.

1. Incremento de variables y desarrollo de la expresión.
2. Restar la función original.
3. Dividir la función.
4. Obtención del lím.

Paso 2: Obtención de la pendiente de la recta tangente

A la función derivada se le asigna un valor deseado en la variable x quedando como resultado del cálculo de sus operaciones, el valor de la pendiente de la recta tangente.

Paso 3: Determinación del punto coordenado

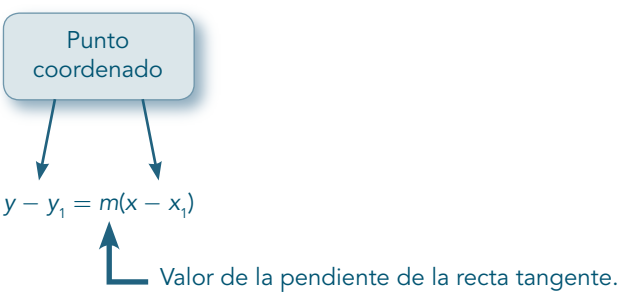
Se sustituye el valor asignado a x en la función original para calcular el valor de y, formándose el punto coordenado a ubicarse en la gráfica.

Paso 4: Obtención de la ecuación de recta

Al tener el valor de la pendiente de la recta tangente en el paso 2 y el punto coordenado en el paso 3 al utilizar la fórmula punto pendiente será fácil obtener la ecuación de la recta tangente.

$y - y_1 = m(x - x_1)$ Fórmula utilizada cuando en la redacción del problema se indica que se conoce la pendiente y un punto dado.

Con el valor de la pendiente de la recta tangente y el punto coordenado, obtenemos la ecuación de recta correspondiente.



Problema resuelto

Obtener la pendiente de la recta tangente $y = x^2$ para $x = 3$

Respuesta

$$y = x^2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$$

Paso 1: Obtención de la primera derivada; *al derivar la función obtenemos que* $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$ *La primera derivada.*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2(3) = 6$$

Paso 2: Obtención de la pendiente de la recta tangente; *en la función derivada se le asigna a la variable x el valor de* 3 *obteniéndose* 6 *de pendiente de la recta tangente.*

$$y = x^2$$

$$y = (3)^2 = 9$$

Paso 3: Determinación del punto coordenado; *con el valor asignado a la variable x en la función original calculamos el valor de y, con su resultado el punto coordenado* (3, 9).

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 9 = +6(x - 3)$$

$$y - 9 = +6x - 18$$

$$y = +6x - 18 + 9$$

$$y = +6x - 9$$

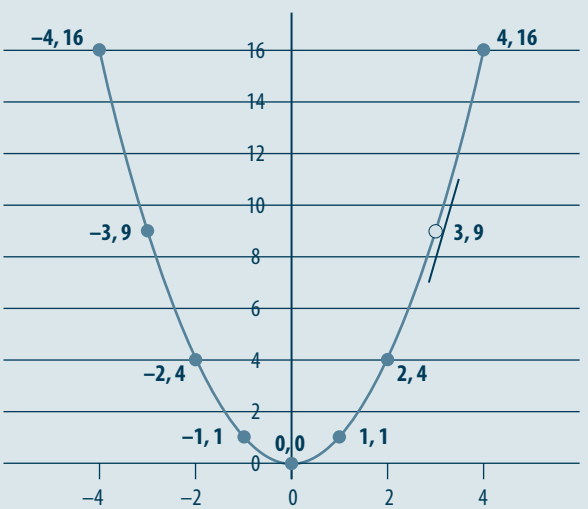
Paso 4: Obtención de la ecuación de recta; *al conocer:*

En el (paso 2) la pendiente $m = 6$

En el (paso 3) el punto coordenado (3, 9)

Integramos la ecuación de la pendiente de la recta tangente.

Gráficamente es lo siguiente:



Problema resuelto

Obtener la pendiente de la recta tangente $y = 3x^2 + 2x$ para $x = -1$

Respuesta

$$y = 3x^2 + 2x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x + 2$$

Paso 1: Obtención de la primera derivada; *al derivar la función obtenemos que* $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x + 2$ *La primera derivada.*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6(-1) + 2 = -6 + 2 = -4$$

Paso 2: Obtención de la pendiente de la recta tangente; *en la función derivada se le asigna a la variable x el valor de* -1 *obteniéndose* -4 *de pendiente de la recta tangente.*

$$y = 3x^2 + 2x$$

$$y = 3(-1)^2 + 2(-1) = 1$$

Paso 3: Determinación del punto coordenado; *con el valor asignado a la variable x en la función original calculamos el valor de y, con su resultado el punto coordenado* $(-1, 1)$.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = -4(x - [-1])$$

$$y - 1 = -4(x + 1)$$

$$y - 1 = -4x - 4$$

$$y = -4x - 4 + 1$$

$$y = -4x - 3$$

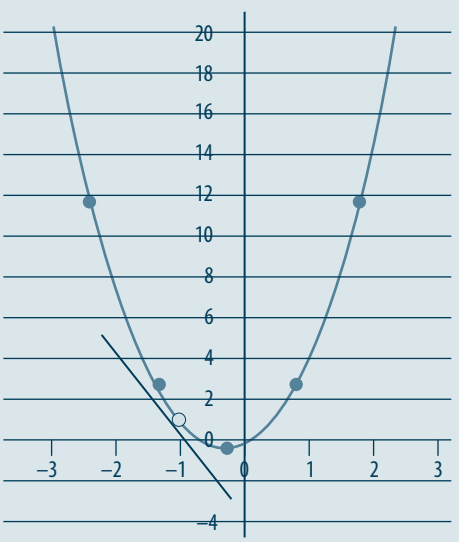
Paso 4: Obtención de la ecuación de recta; *al conocer:*

En el (paso 2) la pendiente $m = -4$

En el (paso 3) el punto coordenado $(-1, 1)$

Integramos la ecuación de la pendiente de la recta tangente.

Gráficamente es lo siguiente:



Problema resuelto

Obtener la pendiente de la recta tangente $y = 3x^2 + 2x + 10$ para $x = 0$

Respuesta

$$y = 3x^2 + 2x + 10$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x + 2$$

Paso 1: Obtención de la primera derivada; *al derivar la función obtenemos que* $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x + 2$ *La primera derivada.*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6(0) + 2 = +2$$

Paso 2: Obtención de la pendiente de la recta tangente; *en la función derivada se le asigna a la variable x el valor de* 0 *obteniéndose* +2 *de pendiente de la recta tangente.*

$$y = 3x^2 + 2x + 10$$

$$y = 3(0)^2 + 2(0) + 10 = 10$$

Paso 3: Determinación del punto coordenado; *con el valor asignado a la variable x en la función original calculamos el valor de y, con su resultado el punto coordenado* (0, 10).

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 10 = 2(x - 0)$$

$$y - 10 = 2x$$

$$y = 2x + 10$$

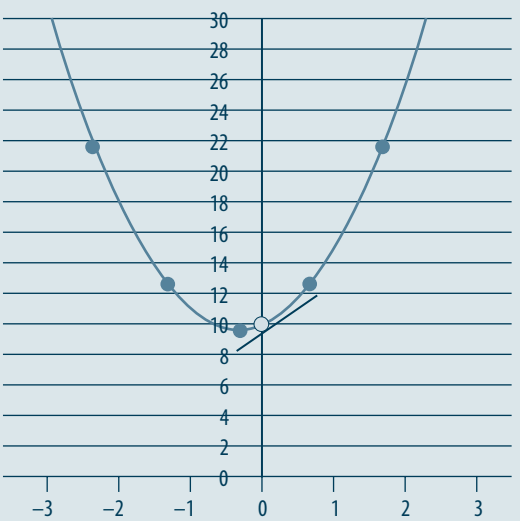
Paso 4: Obtención de la ecuación de recta; *al conocer:*

En el (paso 2) la pendiente $m = +2$

En el (paso 3) el punto coordenado (0, 10)

Integramos la ecuación de la pendiente de la recta tangente.

Gráficamente es lo siguiente:



A continuación se dará solución a ejercicios de derivación, pero en esta ocasión no se emplearan los 4 pasos, se utilizaran reglas de derivación, fórmulas matemáticas, siendo importante, identificar cada una de ellas, pues saber que regla utilizar permitirá obtener su solución.

4.5 Primera derivada (la aplicación de sus reglas)

A diferencia de lo que muchos piensan, el cálculo diferencial es más fácil de trabajar de lo que aparenta; como se indicó lo importante para derivar es conocer e interpretar las reglas de aplicación (sus fórmulas).

Comenzaremos indicando que una derivada se identifica de la siguiente manera:

Símbolo de la derivada

La forma más fácil de identificar que hablamos de una operación de derivada es por medio del símbolo $\frac{d}{dx}$ o la representación de una letra con su apóstrofe y'

Fórmulas para derivar

Las fórmulas que a continuación se exponen son las más utilizadas en la aplicación de este tema:

$$\frac{dc}{dx} = 0 \qquad c = \text{constante}$$

$$\frac{dx}{dx} = 1$$

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}(u + v - w) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\frac{d}{dx}(v)^n = nv^{n-1}\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(uvz) = uv\frac{dz}{dx} + uz\frac{dv}{dx} + vz\frac{du}{dx}$$

ALERTA: El formulario aquí expuesto es limitado, debido a que la intención de esta unidad es enseñarte las reglas básicas para aprender a derivar, si requieres profundizar en el tema, debes buscar un libro especializado en el tema.

A continuación detallaremos algunas.

4.6 Reglas de derivación

Fórmula e interpretación de una constante

Fórmula 1: $\frac{dc}{dx} = 0$ $\quad c = \text{constante}$

La ***c*** utilizada en la fórmula es una constante, y matemáticamente hablando, una constante es un número; te preguntarás, ¿cuál es ese número? La respuesta es muy sencilla, hablamos de cualquier número que se encuentre sin literal (solo).

La derivada de una constante es cero, por tanto todo Número Solo, Vale "Cero".

La explicación del porque la derivada de una constante equivale a cero se explica fácilmente; su valor viene de carecer de tangente. Recordemos que la definición de derivada es justamente la pendiente de la recta tangente a una función en un punto dado.

Fórmula e interpretación de la obtención de la unidad en los procesos de derivación

Fórmula 3: $\frac{dx}{dx} = 1$

Cuando derivamos una literal a exponente uno, se aplica la regla:

Multiplicaremos el Coeficiente por su Exponente y al Exponente le Restaremos Uno.

Si tenemos un exponente uno y le restamos uno, el resultado es un exponente cero y toda expresión elevada a la cero es uno.

Fórmula e interpretación de un valor, que no es considerado una constante

Fórmula 2: $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$

La ***x*** utilizada no es una constante, en la fórmula esta sirve de base para derivar, por lo que cada vez que en un ejercicio encuentres a una literal elevada a un exponente deberás aplicar lo siguiente:

Multiplicaremos el Coeficiente por su Exponente y al Exponente le Restaremos Uno.

4.7 Representación e Interpretación de las fórmulas de derivación

Fórmula:	Interpretación	
$\frac{dc}{dx} = 0 \quad c = constante$	Un número sin literal; cualquier número positivo, negativo, entero fracción o decimal	
$\frac{dx}{dx} = 1$	Una x sola o a exponente uno, igual a 1	
$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$	Una x elevada a cualquier exponente	
$\frac{d}{dx}(u+v-w) = \frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}-\frac{dw}{dx}$	Suma o diferencia de términos, donde u es el primer término, v es el segundo y w el tercero; uniéndose con los signos que el ejercicio presente, obteniéndose lo siguiente:	Del primer término, el termino u al derivar se obtendrá $\frac{du}{dx}$
		Del segundo término, el termino v al derivar se obtendrá $\frac{dv}{dx}$
		Del tercer término, el termino w al derivar se obtendrá $\frac{dw}{dx}$
$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$	Producto de términos u representa al primer factor y v representa el segundo factor obteniéndose lo siguiente:	u primer factor, valor no derivado se multiplicará por la derivada de v o sea $\frac{dv}{dx}$
		sumándose con
		v segundo factor, valor no derivado que se multiplicará por la derivada de u o sea $\frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$	Cociente de términos u representa al numerador y v representa el denominador, todo entre el cuadrado del denominador obteniéndose lo siguiente:	v denominador, valor no derivado se multiplicara por la derivada de u o sea $\frac{du}{dx}$
		restándole
		u numerador, valor no derivado que se multiplicará por la derivada de v o sea $\frac{dv}{dx}$
		Dividiéndose todo entre el cuadrado del denominador
$\frac{d}{dx}(v)^n = nv^{n-1}\frac{dv}{dx}$	Derivada de Potencias es una expresión elevada a una potencia.	En la función v^n el exponente se coloca antecediendo a la función, aplicándose exponente por función, exponente menos uno
		multiplicándose
		por la derivada de v o sea $\frac{dv}{dx}$

Daremos solución a algunos ejercicios, y para ello recomendamos los pasos siguientes:

Paso 1: Identificación de la fórmula a utilizar

El primer paso es identificar, por la fórmula de la función la fórmula a utilizar.

Paso 2: La solución del ejercicio

Para obtener el resultado del ejercicio debemos ubicar la forma de la función para conocer la fórmula a utilizar y seguir el procedimiento que la fórmula establezca; derivando al aplicar el procedimiento de *Multiplicación del coeficiente por su exponente y al exponente le restaremos uno.*

Al aplicar la fórmula $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ los exponentes se ven disminuidos:

- Si el exponente es dos, el ejercicio quedará como exponente uno.
- Si el exponente es uno, el ejercicio queda sin exponente.
- Si es un valor unitario, este siempre valdrá cero.

Problema resuelto

Obtener la derivada de $y = x^2 - 5$

Respuesta

$y = x^2 - 5$

$\frac{dc}{dx} = 0$

$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$

$y' = 2x^{2-1}$

$y' = 2x^1$

Paso 1: Identificación de la fórmula a utilizar; es un problema con términos en x y un término independiente por lo que se aplican las dos fórmulas.

Paso 2: La solución

$$y' = 2x$$

Problema resuelto

Obtener la derivada de $y = x^3 + 5x^2 - x$

Respuesta

$y = x^3 + 5x^2 - x$

$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$

$y' = 3x^{3-1} + 2(5)x^{2-1} - 1x^{1-1}$

$y' = 3x^2 + 10x^1 - 1$

Paso 1: Identificación de la fórmula a utilizar; es un problema solo con términos en x por lo que aplicaremos esa fórmula.

Paso 2: La solución

$$y' = 3x^2 + 10x - 1$$

"Si esto ha quedado claro, ya aprendiste a derivar."

4.8 Derivadas de Suma y Resta

Los siguientes pasos explican la solución a un planteamiento, aplicando la fórmula de la suma o resta de derivadas.

$$\frac{d}{dx}(u+v-w)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}-\frac{dw}{dx}$$

En esta fórmula puedes ver 3 términos:

- El primero se llama "*u*"
- El segundo "*v*"
- El tercero "*w*"

Dice la fórmula que para determinar su solución, deberás obtener: **Las derivadas de cada uno de sus términos, uniéndolos con el signo que tenga.** Con estos planteamientos iniciamos pero para reforzar se expone lo siguiente:

Alerta

La derivada de una suma es igual a la suma de sus derivadas.

Problema resuelto

Obtener la derivada de $y = 2x^6 + 5x^4 - 7x^2 + 3x$

Respuesta

$$y = 2x^6 + 5x^4 - 7x^2 + 3x$$

$$y' = 6(2)x^{6-1} + 4(5)x^{4-1} + 2(-7)x^{2-1} + 1(3)x^{1-1}$$

$$y' = 12x^5 + 20x^3 - 14x^1 + 3$$

Paso 1: Identificación de la fórmula a utilizar; es un problema solo con términos en *x* por lo que aplicamos la fórmula

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

Paso 2: La solución.

Problema resuelto

Obtener la derivada de $y = 8x^3 + \frac{7}{4}x^2 + 0.25x - \frac{1}{2}$

Respuesta

$$y = 8x^3 + \frac{7}{4}x^2 + 0.25x - \frac{1}{2}$$

$$y' = 3(8)x^{3-1} + 2\left(\frac{7}{4}\right)x^{2-1} + 1(0.25)x^{1-1}$$

$$y' = 24x^2 + \frac{14}{4}x^1 + 0.25$$

Paso 1: Identificación de la fórmula a utilizar; es un problema con términos en *x* y un término independiente por lo que aplicaremos dos fórmulas.

$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ Para términos en *x*

$\frac{dc}{dx} = 0$ Para términos independientes

Paso 2: La solución.

Problema resuelto

Obtener la derivada de $y = 7x^5 + \sqrt{x}$

Respuesta

$y = 7x^5 + \sqrt{x}$

Toda raíz puede transformarse en su contrario; la potencia

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

Considerando al índice de la raíz como el denominador de la potencia y al numerador como el exponente de x

Paso 1: Identificación de la fórmula a utilizar; es un problema con términos en x.

Pero en el ejercicio ubicamos una raíz, por lo que la transformaremos en su contraria para que sea más fácil trabajarla, pasándola de una raíz a una potencia.

$y = 7x^5 + x^{\frac{1}{2}}$

$y' = 5(7)x^{5-1} + \frac{1}{2}(1)x^{\frac{1}{2}-1}$

$y' = 35x^4 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

Al derivar se obtiene un negativo en el numerador, por lo que para hacerlo positivo lo pasamos al denominador.

$y' = 35x^4 + \frac{1}{2x^{+\frac{1}{2}}}$

$y' = 35x^4 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Al pasarlo podemos simplificarlo presentándolo nuevamente en una raíz.

Paso 2: La solución:

$$y' = 35x^4 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Problema resuelto

Obtener la derivada de $y = 7x^5 + \sqrt[5]{x^3}$

Respuesta

$y = 7x^5 + \sqrt[5]{x^3}$

Toda raíz puede transformarse en su contrario; la potencia

$$\sqrt[5]{x^3} = x^{\frac{3}{5}}$$

Considerando al índice de la raíz como el denominador de la potencia y al numerador como el exponente de x.

Paso 1: Identificación de la fórmula a utilizar; es un problema con términos en x.

Pero en el ejercicio ubicamos una raíz, por lo que la transformaremos en su contraria para que sea más fácil trabajarla, pasándola de una raíz a una potencia.

$y = 7x^5 + x^{\frac{3}{5}}$

$y' = 5(7)x^{5-1} + \frac{3}{5}(1)x^{\frac{3}{5}-1}$

$y' = 35x^4 + \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}$

Al derivar se obtiene un negativo en el numerador, por lo que para hacerlo positivo lo pasamos al denominador.

$y' = 35x^4 + \frac{3}{5x^{+\frac{2}{5}}}$

$y' = 35x^4 + \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$

Al pasarlo podemos simplificarlo presentándolo nuevamente en una raíz.

Paso 2: La solución:

$$y' = 35x^4 + \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$$

4.9 Multiplicación de derivadas

A continuación, se explica la manera de solucionar un problema que involucra una operación de multiplicación en las derivadas.

$$\frac{d}{dx}(u\ v) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

En la fórmula puede observarse que "u" multiplica a "v".

- "u" primer valor

  y
- "v" segundo valor.

La fórmula estipula que para dar solución: **Debe multiplicarse el valor de "u" por la derivada de "v", y se suma la multiplicación de "v" por la derivada de "u".**

Alerta

La derivada de un producto es la suma de las multiplicaciones.

$$\frac{d}{dx}(u\ v) = u\ v' + v\ u'$$

Problema resuelto

Obtener la derivada de $y = (7x^2)(x)$

Respuesta

$y = (7x^2)(x)$

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

$y' = (7x^2)(1) + (14x)(x)$

$y' = 7x^2 + 14x^2$

$y' = 21x^2$

Paso 1: Identificación de la fórmula a utilizar; es un problema de multiplicación, por tanto se requiere de términos originales y sus derivadas

$u = 7x^2$ $\qquad$ $v = x$

$u' = 14x$ $\qquad$ $v' = 1$

Sustituye los valores de acuerdo como lo pida la fórmula para obtener la solución (Paso 2).

Problema resuelto

Obtener la derivada de $y = (7x^2 + 3x)(2x + 5)$

Respuesta

$y = (7x^2 + 3x)(2x + 5)$

$$\frac{d}{dx}(u\ v) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

$y' = (7x^2 + 3x)(2) + (2x + 5)(14x + 3)$

$y' = 14x^2 + 6x + 28x^2 + 6x + 70x + 15$

$y' = 42x^2 + 82x + 15$

Paso 1: Identificación de la fórmula a utilizar; es un problema de multiplicación, por tanto se requiere de términos originales y sus derivadas

$u = 7x^2 + 3x$ $\qquad$ $v = 2x + 5$

$u' = 14x + 3$ $\qquad$ $v' = 2$

Solo sustituye los valores de acuerdo como lo pida la fórmula para obtener la solución (Paso 2).

Problema resuelto

Obtener la derivada de $y = (2x - 50)\left(x - \frac{5}{2}\right)$

Respuesta

$$y = (2x - 50)\left(x - \frac{5}{2}\right)$$

$$\overset{u}{(2x - 50)} \quad \overset{v'}{(1)} \quad + \quad \overset{v}{\left(x - \frac{5}{2}\right)} \quad + \quad \overset{u'}{(2)}$$

$$y' = 2x - 50 + 2x - 5$$

$$y' = 4x - 55$$

Problema resuelto

Obtener la derivada de $y = (x + 2)(4x^3 - 5x^2 + 8x - 10)$

Respuesta

$$y = (x + 2)(4x^3 - 5x^2 + 8x - 10)$$

$$\overset{u}{(x + 2)} \quad \overset{v'}{(12x^2 - 10x + 8)} \quad + \quad \overset{v}{(4x^3 - 5x^2 + 8x - 10)} \quad + \quad \overset{u'}{(1)}$$

$$y' = 12x^3 - 10x^2 + 8x + 24x^2 - 20x + 16 + 4x^3 - 5x^2 + 8x - 10$$

$$y' = 16x^3 + 9x^2 - 4x + 6$$

Problema resuelto

Obtener la derivada de $y = (-3x^3 - 5x)(-2x^3 - 4x^2 - 10)$

Respuesta

$$y = (-3x^3 - 5x)(-2x^3 - 4x^2 - 10)$$

$$\overset{u}{(-3x^3 - 5x)} \quad \overset{v'}{(-6x^2 - 8x)} \quad + \quad \overset{v}{(-2x^3 - 4x^2 - 10)} \quad \overset{u'}{(-9x^2 - 5)}$$

$$y' = 18x^5 + 24x^4 + 30x^3 + 40x^2 + 18x^5 + 10x^3 + 36x^4 + 20x^2 + 90x^2 + 50$$

$$y' = 36x^5 + 60x^4 + 40x^3 + 150x^2 + 50$$

4.10 Derivada de cocientes

En este apartado se expondrá cómo se calcula la derivada de cocientes.

Alerta

La derivada de un cociente se calcula con la siguiente fórmula

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\ u'-u\ v'}{v^2}$$

Siendo lo mismo cualquiera de las dos fórmulas expuestas.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\dfrac{du}{dx}-u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

En la fórmula puedes observar que "u" divide a "v"

- "*u*" el valor superior.
- "*v*" el valor inferior.

La fórmula estipula que para dar solución: **Debe multiplicarse el valor de "*v*" por la derivada de "*u*" y restar la multiplicación de "*u*" por la derivada de "*v*", presentándolo todo entre el valor de "v al cuadrado".**

Problema resuelto

Obtener la derivada de $y=\dfrac{7x^2+3}{2x+5}$

Respuesta

$$y=\frac{7x^2+3}{2x+5}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\dfrac{du}{dx}-u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\frac{\overset{v}{(2x+5)}\quad\overset{u'}{(14x)}\quad-\quad\overset{u}{(7x^2+3)}\quad\overset{v'}{(2)}}{(2x+5)^2}$$

Paso 1: Identificación de la fórmula a utilizar; es un problema de división, por tanto se requiere de términos originales y sus derivadas

$u=7x^2+3$ $\qquad$ $v=2x+5$

$u'=14x$ $\qquad$ $v'=2$

Solo sustituye los valores de acuerdo a como lo pide la fórmula y obtén su solución.

$$\frac{+28x^2+70x-(14x^2+6)}{(2x+5)^2}$$

Se multiplican los polinomios y se resta, de ser necesario se simplifica y toda la operación entre $(v)^2$

$$\frac{+28x^2+70x-14x^2-6}{(2x+5)^2}$$

$$y'=\frac{+14x^2+70x-6}{(2x+5)^2}$$

Paso 2: La solución:

$$y'=\frac{+14x^2+70x-6}{(2x+5)^2}$$

Problema resuelto

Obtener la derivada de $y = \dfrac{4x^2 + 3x + 8}{x + 5}$

Respuesta

$$y = \frac{4x^2 + 3x + 8}{x + 5}$$

$$\frac{\overset{v}{(x+5)}\quad \overset{u'}{(8x+3)} \quad - \quad \overset{u}{(4x^2+3x+8)}\quad \overset{v'}{(1)}}{(x+5)^2}$$

$$\frac{8x^2 + 3x + 40x + 15 - (4x^2 + 3x + 8)}{(x+5)^2}$$

$$\frac{8x^2 + 3x + 40x + 15 - 4x^2 - 3x - 8}{(x+5)^2}$$

$$y' = \frac{4x^2 + 40x + 7}{(x+5)^2}$$

Paso 1: Identificación de la fórmula a utilizar; es un problema de división, se requiere términos originales y derivados

$u = 4x^2 + 3x + 8 \quad v = x + 5$

$u' = 8x + 3 \quad v' = 1$

Solo sustituye los valores de acuerdo a como lo pide la fórmula y obtén su solución.

Se multiplican los polinomios y se resta, de ser necesario se simplifica toda la operación entre $(v)^2$.

Paso 2: La solución:

$$y' = \frac{4x^2 + 40x + 7}{(x+5)^2}$$

Problema resuelto

Obtener la derivada de $y = \dfrac{4x^3 - 3x^2 + 8x}{2x^2 - 3x + 7}$

Respuesta

$$y = \frac{4x^3 - 3x^2 + 8x}{2x^2 - 3x + 7}$$

$$\frac{\overset{v}{(2x^2-3x+7)}\quad \overset{u'}{(12x^2-6x+8)} \quad - \quad \overset{u}{(4x^3-3x^2+8x)}\quad \overset{v'}{(4x-3)}}{(2x^2-3x+7)^2}$$

$$\frac{24x^4 - 12x^3 + 16x^2 - 36x^3 + 18x^2 - 24x + 84x^2 - 42x + 56 - (16x^4 - 12x^3 - 12x^3 + 9x^2 + 32x^2 - 24x)}{(2x^2 - 3x + 7)^2}$$

$$\frac{24x^4 - 48x^3 + 118x^2 - 66x + 56 - (16x^4 - 24x^3 + 41x^2 - 24x)}{(2x^2 - 3x + 7)^2}$$

$$y' = \frac{24x^4 - 48x^3 + 118x^2 - 66x + 56 - 16x^4 + 24x^3 - 41x^2 + 24x}{(2x^2 - 3x + 7)^2}$$

$$y' = \frac{8x^4 - 24x^3 + 77x^2 - 42x + 56}{(2x^2 - 3x + 7)^2}$$

4.11 Derivadas de potencias

La exponenciación es un valor o un conjunto de valores elevados en su totalidad a otra potencia $(\blacksquare^{m})^{n}$

$$\frac{d}{dx}(v)^n = nv^{n-1}\frac{dv}{dx}$$

En esta fórmula se aprecia que "v" se encuentra elevada a una potencia "n".

Solo que en esta ocasión "v" no es un término, sino un conjunto de términos, ya que si fuera un término solo, la letra representada no sería "v" sino "x".

La fórmula estipula que para dar solución: **Se presenta el exponente antecediendo al valor de "v" y restándole uno al exponente, multiplicando por la derivada de "v".**

Alerta

La derivada de una potencia está dada por la fórmula

$$\frac{d}{dx}(v)^n = nv^{n-1}(v')$$

Problema resuelto

Obtener la derivada de $y = (x^8 + 4)^2$

Respuesta

$y = (x^8 + 4)^2$

$$\frac{d}{dx}(v)^n = nv^{n-1}\frac{dv}{dx}$$

$y' = 2(x^8 + 4)^{2-1}[8x^7]$

$y' = 2(x^8 + 4)^1[8x^7]$

$y' = 2[8x^7](x^8 + 4)^1$

$y' = 16x^7(x^8 + 4)^1$

Paso 1: Identificación de la fórmula a utilizar; es un problema de potenciación, se requieren términos originales y sus derivados

$v = x^8 + 4 \qquad v' = 8x^7$

Sustituye los valores como lo pida la fórmula y obtén la solución.

Ojo: No puedes multiplicar 15 por el símbolo de agrupación $(x^8)^{14}$ porque el símbolo de agrupación está elevado a un exponente.

Paso 2: La solución:

$$y' = 16x^7(x^8 + 4)^1$$

Estos problemas pueden resolverse de una manera alterna, misma que hemos venido desarrollando, la manera alterna es resolver el binomio y derivar su resultado.

$y = (x^8 + 4)^2$

$y = (x^8 + 4)(x^8 + 4)$

$y = x^{16} + 4x^8 + 4x^8 + 16$

$y = x^{16} + 8x^8 + 16$

$y' = 16x^{15} + 64x^7$

Si se factoriza puede observarse que el resultado es el mismo.

$16x^{15} + 64x^7$

$16x^7(x^8 + 4)$

Paso 1: Identificación de la fórmula a utilizar; es un problema de potenciación, pero puede obtenerse su producto para después derivarse.

Paso 2: La solución:

$$y' = 16x^{15} + 64x^7$$

$$y' = 16x^7(x^8 + 4)^1$$

En ocasiones es improcedente dar solución a un ejercicio por multiplicación de polinomios ya que su exponente es muy alto, para esos ejercicios se recomienda el empleo de la fórmula.

Problema resuelto

Obtener la derivada de $y = (x^8)^{15}$

Respuesta

$y = (x^8)^{15}$

$$\frac{d}{dx}(v)^n = nv^{n-1}\frac{dv}{dx}$$

$y' = 15(x^8)^{15-1}[8x^7]$

Paso 1: Identificación de la fórmula a utilizar; es un problema de potenciación, se requieren términos originales y sus derivados

$v = x^8 \qquad v' = 8x^7$

Sustituye los valores como lo pida la fórmula y obtén la solución.

$y' = 15(x^8)^{14}\ [8x^7]$

Ojo: No puedes multiplicar 15 por el símbolo de agrupación $(x^8)^{14}$ porque el símbolo de agrupación está elevado a un exponente.

$y' = 15[8x^7](x^8)^{14}$

$y' = 120x^7(x^8)^{14}$

Paso 2: La solución:

$y' = 120x^7\ (x^8)^{14}$

Problema resuelto

Obtener la derivada de $y = (x^4 + 9)^6$

Respuesta

$y = (x^4 + 9)^6$

$$\frac{d}{dx}(v)^n = nv^{n-1}\frac{dv}{dx}$$

$y' = 6(x^4 + 9)^{6-1}[4x^3]$

Paso 1: Identificación de la fórmula a utilizar; es un problema de potenciación, se requieren términos originales y sus derivados

$v = x^4 + 9 \qquad v' = 4x^3$

Sustituye los valores como lo pida la fórmula y obtén la solución.

$y' = 6(x^4 + 9)^5[4x^3]$

Ojo: No puedes multiplicar 6 por el símbolo de agrupación $(x^4 + 9)^5$ porque el símbolo de agrupación está elevado a un exponente.

$y' = 6[4x^3](x^4 + 9)^5$

$y' = 24x^3(x^4 + 9)^5$

Paso 2: La solución:

$y' = 24x^3(x^4 + 9)^5$

Una de las aplicaciones que tiene la primera derivada es la de ubicar si una función presenta un máximo o un mínimo o ambos, indicando así si la función es creciente o decreciente, al localizar los puntos críticos o extremos relativos si es que estos existen, una manera de ver si una función es creciente o decreciente se explicará a continuación.

4.12 Prueba de la primera derivada

Como se indicó; la primera derivada corresponde a la pendiente de la función en un punto, siendo la prueba de la primera derivada la empleada para obtener extremos relativos, máximos y mínimos, funciones crecientes o decrecientes.

Alerta

La prueba de la primera derivada permite determinar si una función es creciente o decreciente.

Funciones creciente y decreciente

Se dice que una función es creciente, si al moverse *x* hacia la derecha la gráfica se proyecta hacia arriba y decreciente al contrario, observa las siguientes diferencias.

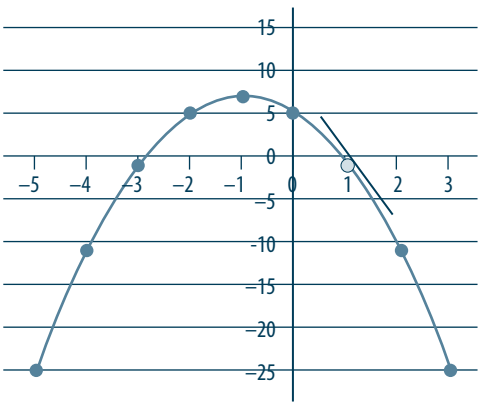
Alerta

En una función decreciente la pendiente es negativa.

Alerta

En una función creciente la pendiente es positiva.

Función decreciente: es la función en la cual si *x* crece la *y* decrece, por lo que su pendiente es negativa.



La gráfica presenta un extremo relativo y en este caso presentará un máximo relativo al tener cero de pendiente.

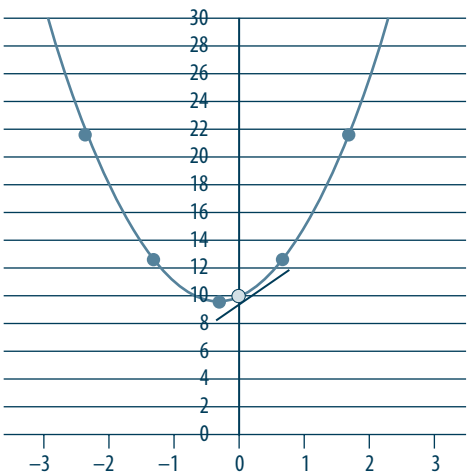
Al analizar la concavidad de la curva observamos que es cóncava hacia abajo y al hacer el recorrido de izquierda a derecha su pendiente decrecerá, cambiando su primera derivada de positiva a negativa.

La prueba de la primera derivada indica **un máximo** si al sustituir valores en $f'(x)$ por izquierda (inferiores) o por derecha (superiores) al punto crítico, la función pasa de creciente a decreciente.

Valores inferiores ← Punto crítico → Valores superiores

Al pasar de + a −
La función presenta un Máximo

Función creciente: es la función en la cual si *x* crece también *y* lo hace, por lo que su pendiente es positiva.



La gráfica presenta un extremo relativo y en este caso presentará un mínimo relativo al tener cero de pendiente.

Al analizar la concavidad de la curva observamos que es cóncava hacia arriba y al hacer el recorrido de izquierda a derecha su pendiente crecerá, pasando su primera derivada de negativa a positiva.

La prueba de la primera derivada indica, **un mínimo** si al sustituir valores en $f'(x)$ por izquierda (inferiores) o por derecha (superiores) al punto crítico, la función pasa de decreciente a creciente.

Valores inferiores ← Punto crítico → Valores superiores

Al pasar de − a +
La función presenta un Mínimo

Para conocer donde la función presenta un máximo o un mínimo y dónde es creciente o decreciente, se recomiendan los pasos siguientes:

Paso 1: Obtención de la primera derivada

Al tener la función la derivamos, obteniendo la primera derivada.

Paso 2: Igualación a cero de la primera derivada

Al obtener la primera derivada esta es igualada a cero, para obtener puntos críticos.

Paso 3: Resolución de la ecuación

Para dar solución se puede Factorizar, emplear la Fórmula general, tabular, etcétera.

Paso 4: Aplicar la prueba a la primera derivada

Al sustituir valores por izquierda (inferiores) o por derecha (superiores) a cada uno de los puntos críticos se sabrá sí la función es creciente o decreciente, ya que cuando cambie de creciente a decreciente presentara un máximo, al contrario presentará un mínimo.

Problema resuelto

Puntos donde la función presenta máximo y mínimo en $y = x^3 - 3x^2 + 2$

Respuesta

$y = x^3 - 3x^2 + 2$

$y' = 3x^2 - 6x$

$0 = 3x^2 - 6x$

Factorizando obtenemos:

$(3x)(x - 2)$

Igualando a cero tenemos:

$3x = 0$

$x = \frac{0}{3} = 0$

$x - 2 = 0$

$x = +2$

Los valores críticos son 0, +2

Paso 1: Obtención de la primera derivada;

$$y' = 3x^2 - 6x$$

Paso 2: Igualación a cero de la primera derivada;

$$0 = 3x^2 - 6x$$

Paso 3: Resolución de la ecuación; *aquí factorizamos, buscamos el término común encontrando que es 3x después cada factor se iguala a cero, obteniéndose los puntos críticos.*

Paso 4: Aplicar la prueba de la primera derivada; si la derivada cambia de + a − tiene un máximo. Si la derivada cambia de − a + tiene un mínimo.

$3[-0.5]^2 - 6[-0.5] = +3.75$ Creciente

0 punto crítico

$3[+0.5]^2 - 6[+0.5] = -2.25$ Decreciente

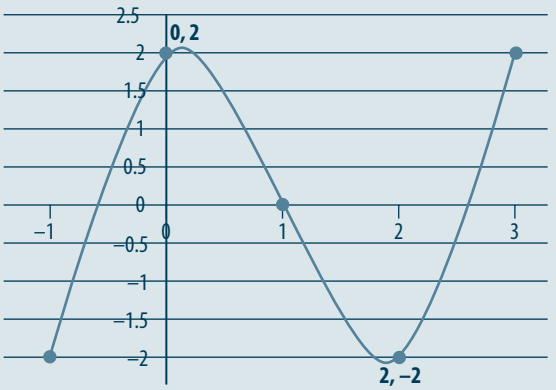
$y = (0)^3 - 3(0)^2 + 2$ Máximo en $(0, 2)$

$3[1.5]^2 - 6[1.5] = -2.25$ Decreciente

2 punto crítico

$3[+2.5]^2 - 6[+2.5] = +3.75$ Creciente

$y = (2)^3 - 3(2)^2 + 2$ Mínimo en $(2, -2)$



Problema resuelto

Encontrar los máximos y mínimos relativos (si existen) de la siguiente función $y = 12x^3 + 18x^2 + 1$

Respuesta

$y = 12x^3 + 18x^2 + 1$

$y' = 36x^2 + 36x$

$0 = 36x^2 + 36x$

Factorizando obtenemos:

$(4x)(9x + 9)$

Igualando a cero tenemos:

$4x = 0$

$x = \frac{0}{4} = 0$

$9x + 9 = 0$

$9x = -9$

$x = \frac{-9}{9} = -1$

Los valores críticos son 0, −1

Paso 1: Obtención de la primera derivada;

$y' = 36x^2 + 36x$

Paso 2: Igualación a cero de la primera derivada;

$0 = 36x^2 + 36x$

Paso 3: Resolución de la ecuación; *aquí factorizamos, buscamos el término común encontrando que es 4x después a cada factor se iguala a cero, obteniendo los puntos críticos.*

Los valores críticos son 0, −1

Paso 4: Aplicar la prueba de la primera derivada.

$36[-0.5]^2 + 36[-0.5] = -9$ Decreciente

0 punto crítico

$36[+0.5]^2 + 36[+0.5] = +27$ Creciente

$y = 12(0)^3 + 18(0)^2 + 1$ Mínimo en (0, 1)

Al pasar la función de Decreciente a Creciente, el punto crítico representará un punto Mínimo en la función.

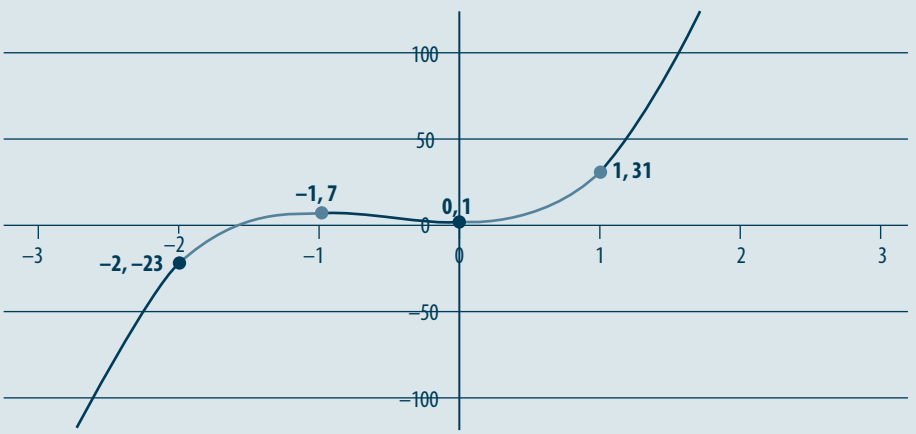
$36[-1.5]^2 + 36[-1.5] = +27$ Creciente

−1 punto crítico

$36[-0.5]^2 + 36[-0.5] = -9$ Decreciente

$y = 12(-1)^3 + 18(-1)^2 + 1$ Máximo en (−1, 7)

Al pasar la función de Creciente a Decreciente, el punto crítico representará un punto Máximo en la función.



Problema resuelto

Encontrar los máximos y mínimos relativos (si existen) de la siguiente función $y = 2x^3 + x^2 - 4x + 5$

Respuesta

$$y = 2x^3 + x^2 - 4x + 5$$

$$y' = 6x^2 + 2x - 4$$

$$0 = 6x^2 + 2x - 4$$

De la fórmula general obtenemos:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\frac{-(2) \pm \sqrt{(2)^2 - 4(6)(-4)}}{2(6)}$$

$$\frac{-2 \pm 10}{12} = \begin{matrix} \frac{-2+10}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \\ \frac{-2-10}{12} = \frac{-12}{12} = -1 \end{matrix}$$

Paso 1: Obtención de la primera derivada;

$$y' = 6x^2 + 2x - 4$$

Paso 2: Igualación a cero de la primera derivada;

$$0 = 6x^2 + 2x - 4$$

Paso 3: Resolución de la ecuación; *después de igualar a cero, se utilizó la fórmula general obteniendo* $x_1 = -1$ *y* $x_2 = \frac{2}{3}$ *los puntos críticos.*

Paso 4: Aplicar la prueba de la primera derivada; el extremo relativo mínimo por cambiar de decreciente a creciente es $\left(\frac{2}{3},\ 3.37\right)$ y el máximo al cambiar de creciente a decreciente es $(-1,\ 8)$.

$6\left[\frac{1}{2}\right]^2 + 2\left[\frac{1}{2}\right] - 4 = -\frac{3}{2}$ Decreciente

$\boxed{\frac{2}{3} \text{ punto crítico}}$

$6\left[\frac{3}{4}\right]^2 + 2\left[\frac{3}{4}\right] - 4 = +\frac{7}{8}$ Creciente

$y = 2\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4\left(\frac{2}{3}\right) + 5$ Mínimo en $\left(\frac{2}{3},\ 3.3703\right)$

$6[-1.5]^2 + 2[-1.5] - 4 = +6.5$ Creciente

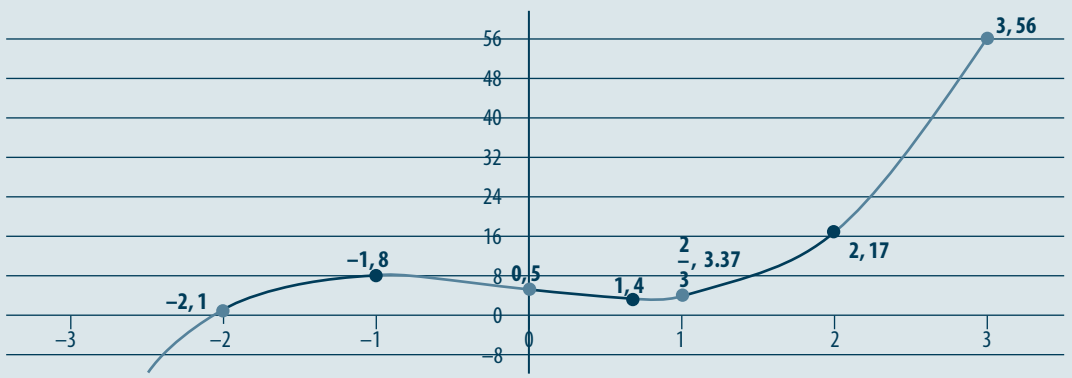
$\boxed{-1 \text{ punto crítico}}$

$6[-0.5]^2 + 2[-0.5] - 4 = -3.5$ Decreciente

$y = 2(-1)^3 + (-1)^2 - 4(-1) + 5$ Máximo en $(-1,\ 8)$

La prueba de la primera derivada indica:

Sí la derivada cambia de + creciente a − decreciente tiene un máximo y cuando cambia de − decreciente a + creciente presenta un mínimo.



Problema resuelto

Encontrar los máximos y mínimos relativos (si existen) de la siguiente función $y = -2x^3 - 6x^2 + 1$

Respuesta

$y = -2x^3 - 6x^2 + 1$

$y' = -6x^2 - 12x$

$0 = -6x^2 - 12x$

Factorizando obtenemos:

$(-6x)(x + 2)$

Igualando a cero tenemos:

$-6x = 0$

$x = \frac{0}{-6} = 0$

$x + 2 = 0$

$x = -2$

Los valores críticos son 0, −2

Paso 1: Obtención de la primera derivada;

$$y' = -6x^2 - 12x$$

Paso 2: Igualación a cero de la primera derivada;

$$0 = -6x^2 - 12x$$

Paso 3: Resolución de la ecuación; *aquí factorizamos, buscando él término común −6x después cada factor se iguala a cero y se obtienen los puntos críticos.*

Paso 4: Aplicar la prueba de la primera derivada; el extremo relativo máximo es (0, 1) por cambiar la función de creciente a decreciente y el mínimo en (−2, −7) ya que la función cambia de decreciente a creciente.

$-6[-0.5]^3 - 12[-0.5]^2 = 4.5$ Creciente

0 punto crítico

$-6[+0.5]^3 - 12[+0.5]^2 = -7.5$ Decreciente

$y = -2(0)^3 - 6(6)^2 + 1$ Máximo en (0, 1)

$-6[-2.5]^3 - 12[-2.5]^2 = -7.5$ Decreciente

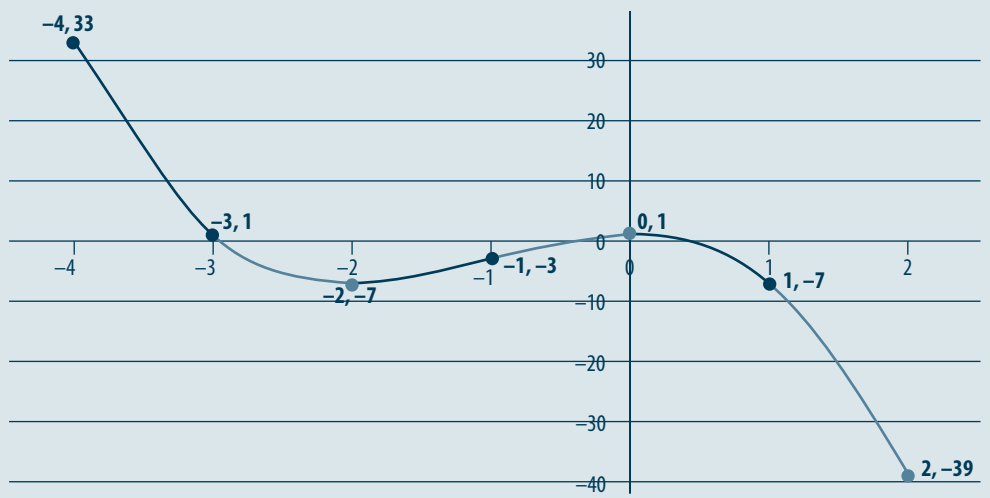
−2 punto crítico

$-6[-1.5]^3 - 12[-1.5]^2 = 4.5$ Creciente

$y = -2(-2)^3 - 6(-2)^2 + 1$ Mínimo en (−2, −7)

La prueba de la primera derivada es:

Si la derivada cambia de + a − tiene un máximo y cuando cambia de − a + tiene un mínimo.



Problema resuelto

Encontrar los máximos y mínimos relativos (si existen) de la siguiente función $y = -5x^3 - 30x^2$

Respuesta

$y = -5x^3 - 30x^2$

$y' = -15x^2 - 60x$

$0 = -15x^2 - 60x$

De la fórmula general obtenemos:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\frac{-(-60) \pm \sqrt{(-60)^2 - 4(-15)(0)}}{2(-15)}$$

$$\frac{-60 \pm 60}{-30} = \begin{matrix} \frac{60 + 60}{-30} = \frac{120}{-30} = -4 \\ \frac{60 - 60}{-30} = \frac{0}{-30} = 0 \end{matrix}$$

Los valores críticos son -4, 0

Paso 1: Obtención de la primera derivada;

$$y' = -15x^2 - 60x$$

Paso 2: Igualación a cero de la primera derivada;

$$0 = -15x^2 - 60x$$

Paso 3: Resolución de la ecuación; *después de igualar a cero se utilizó la fórmula general obteniendo que* $x_1 = -4$ *y* $x_2 = 0$, *los puntos críticos.*

Paso 4: Aplicar la prueba de la primera derivada; el extremo relativo mínimo es $(-4, -160)$ al cambiar de decreciente a creciente y el máximo en $(0, 0)$ al cambiar de creciente a decreciente.

$-15[-4.5]^3 - 60[-4.5]^2 = -33.75$ Decreciente | -4 punto crítico | $-15[-3.5]^3 - 60[-3.5]^2 = +26.25$ Creciente

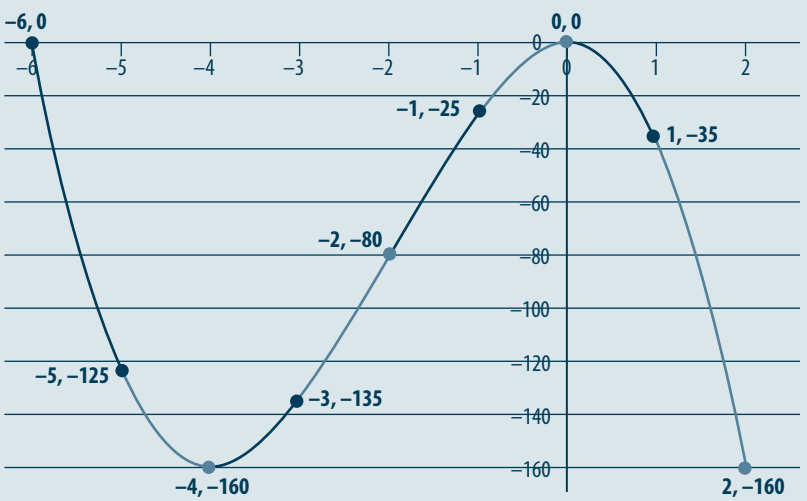
$y = -5(-4)^3 - 30(-4)^2$ Mínimo en $(-4, -160)$

$-15[-0.5]^3 - 60[-0.5]^2 = +26.25$ Creciente | 0 punto crítico | $-15[+0.5]^3 - 60[+0.5]^2 = -33.75$ Decreciente

$y = 2(0)^3 + (0)^2$ Máximo en $(0, 0)$

La prueba de la primera derivada es:

Si la derivada cambia de + creciente a − decreciente tiene un máximo y cuando cambia de − decreciente a + creciente presenta un mínimo.



Problema resuelto

En una tienda de regalos el supervisor ha observado que cuando el precio de un producto es de $20.00, los clientes compran 200 productos, pero cuando el precio se duplica compran solo 120 productos.

En base a sus ventas el supervisor se pregunta: ¿Cuál podrá ser su máximo ingreso?

Respuesta

ALERTA: En el planteamiento no se ubica un dato de ingreso, lo que se observa es un problema de recta de dos puntos, relacionando unidades con precio y el ingreso es: $I = Px$

Dando solución al problema de recta tenemos:

(x, y) ← **Paso 1:** Identificación de los datos.

(unidades, precio) ← **Paso 2:** Tipificar variables.

$(200, 20)$
$(120, 40)$ } Datos ← **Paso 3:** Integración y cálculo de los puntos coordenados.

La aplicación de los datos en la fórmula y la resolución del problema.

Fórmula de los dos puntos:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 20 = \frac{40 - 20}{120 - 200}(x - 200)$$

$$y - 20 = \frac{20}{-80}(x - 200)$$

$$y - 20 = -0.25(x - 200)$$

$$y - 20 = -0.25x + 50$$

$$y = -0.25x + 50 + 20$$

$$y = -0.25x + 70$$

Al resolver el problema observamos que y es tipificada como P el precio; por lo tanto la ecuación sería $P = -0.25x + 70$ por lo que al multiplicarla por x las unidades se obtendrá la fórmula del ingreso.

La fórmula del ingreso es:

$P = -0.25x + 70$ ← Aquí se tiene P, por lo que si deseamos $\boldsymbol{I}$ debemos multiplicar a toda la ecuación por $\boldsymbol{x}$; obteniéndose $I = Px$.

$$I = Px$$

$$I = (-0.25x + 70)x$$

$$I = -0.25x^2 + 70x$$

Respuesta (*continuación*)

Al tener la ecuación de Ingreso esta puede derivarse:

$I = -0.25x^2 + 70x$

$I' = -0.5x + 70$

Paso 1: Obtención de la primera derivada;

$I' = -0.5x + 70$

$0 = -0.5x + 70$

Paso 2: Igualación a cero de la derivada;

$0 = -0.5x + 70$

$0 = -0.5x + 70$

$0.5x = +70$

$x = \dfrac{70}{0.5} = 140$

Paso 3: Resolución de la ecuación; *al resultar una ecuación de primer grado solo despejamos y obtenemos las unidades.*

$-0.5[139] + 70 = +0.5$ Creciente | 140 punto crítico | $-0.5[141] + 70 = -0.5$ Decreciente

Paso 4: Aplicar la prueba de la primera derivada; por izquierda es Creciente y por derecha Decreciente y como la función pasa de creciente a decreciente, se obtendrá un máximo relativo.

Máximo en (140, 4 900)

$I = -0.25(140)^2 + 70(140)$

$I = 4\,900$

El problema brinda la siguiente interpretación: con 140 productos vendidos se ve maximizado el ingreso en $4,900.00, obteniéndose que el precio máximo que los clientes están dispuestos a pagar es de $35.00

4.13 La segunda derivada

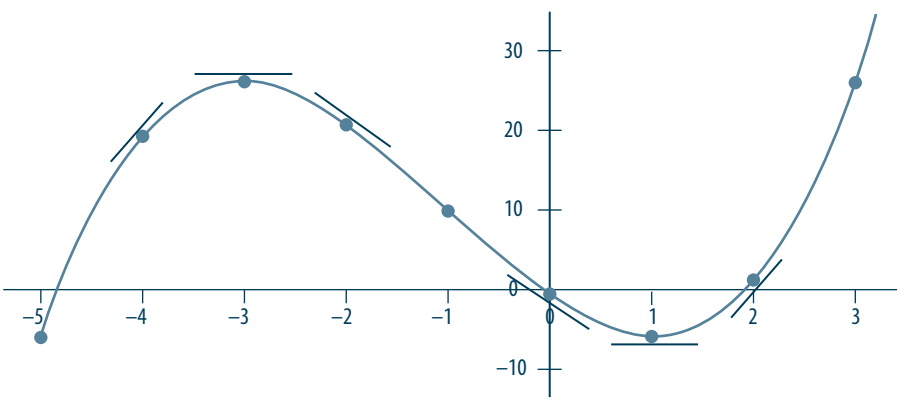
La segunda derivada es la derivada de la primera derivada, diferenciándose esta por ser biprima; denotándose por $f''(x)$ o $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ o y'' permitiendo identificar si una función cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.

Concavidad hacia arriba

La concavidad hacia arriba se observa, cuando la curva queda encima de sus líneas de tangencia.

Concavidad hacia abajo

La concavidad hacia abajo o convexidad se observa, cuando la curva queda debajo de sus líneas de tangencia.



Alerta

La segunda derivada puede utilizarse para determinar donde una función es cóncava o convexa.

Como el cálculo de los extremos relativos permite ubicar máximos y mínimos (prueba de la primera derivada), aquí además de conocer si una función presenta un máximo o un mínimo, ubicaremos si la curva es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo, aplicándose para ello las siguientes reglas de correspondencia entre concavidad y el criterio de la segunda derivada.

- Si la segunda derivada es mayor que cero, la gráfica de f será cóncava hacia arriba en ese intervalo; es decir cuando $f''(x) > 0$ f se presentara cóncava hacia arriba.
- Si la segunda derivada es menor que cero, la gráfica de f será cóncava hacia abajo en el intervalo; es decir cuando $f''(x) < 0$ f se presentara cóncava hacia abajo.

  Lo anterior se traduce también de la siguiente manera:

  - Si $f''(x) < 0$ la función presenta un valor máximo.
  - Si $f''(x) > 0$ la función presenta un valor mínimo.
  - Si $f''(x) = 0$ la función presenta un punto de inflexión.

4.14 Criterio de la segunda derivada

La segunda derivada se obtiene aplicando las mismas reglas de derivación utilizadas en la obtención de la primera derivada, con la diferencia que ahora se calculara una segunda derivada, la cual permitirá con mayor facilidad ubicar puntos máximo, mínimo y otro punto importante, el punto de inflexión, si estos existen en la función.

Para determinar el punto máximo, mínimo y punto de inflexión se recomienda lo siguiente:

Paso 1: Obtención de la primera derivada

Al tener la función la derivamos, obteniendo la primera derivada.

Paso 2: Igualación a cero de la primera derivada

Al obtener la primera derivada esta es igualada a cero, para obtener puntos críticos.

Paso 3: Resolución de la ecuación

Para dar solución se puede Factorizar, emplear la Fórmula general, tabular, etcétera.

Paso 4: Obtener la segunda derivada (derivar lo ya derivado)

Derivar la ecuación derivada, a esto llamamos: encontrar la segunda derivada.

Paso 5: Aplicar la prueba de la segunda derivada, para la obtención del máximo, mínimo y punto de inflexión

En la(s) incógnita(s) de la segunda derivada se realizará la sustitución de los valores críticos, pudiéndose obtener alguno de los siguientes resultados: positivo que al ser $f''(x) > 0$ será el mínimo, negativo que por ser $f''(x) < 0$ identificaremos como máximo o bien un punto de inflexión cuándo $f''(x) = 0$.

Paso 6: La evaluación (el punto coordenado)

En la función original o inicial sustituimos en la(s) incógnita(s), el valor crítico identificado como máximo o mínimo para determinar cada punto coordenado.

Si se indica obtención del **mínimo,** en la segunda derivada se debe ubicar el resultado positivo, el mayor que cero $f''(x) > 0$ para sustituir en la(s) incógnita(s) de la función original o inicial el valor crítico referido como mínimo, determinando el punto coordenado.

Si se indica obtención del **máximo** en la segunda derivada se debe ubicar el resultado negativo, el menor que cero $f''(x) < 0$ para sustituir en la(s) incógnita(s) de la función original o inicial el valor crítico referido como máximo, determinando el punto coordenado.

Para obtener el **punto de inflexión** la segunda derivada se iguala a cero $f''(x) = 0$ despejándose la incógnita, para evaluar la incógnita despejada en la función original, presentándose la variación de la primera deriva, el cambio de sentido.

Problema resuelto

Obtener el máximo relativo (si existe) de la función $y = 2x^3 - 6x^2 + 5$

Respuesta

$y = 2x^3 - 6x^2 + 5$

$y' = 6x^2 - 12x$

$0 = 6x^2 - 12x$

Factorizando obtenemos:

$(6x)(x - 2)$

Igualando a cero tenemos:

$6x = 0$

$x = \frac{0}{6} = 0$

$x - 2 = 0$

$x = +2$

Los valores críticos son 0, +2

$y'' = 12x - 12$

Al ser menor que cero se presenta un máximo.

$y'' = 12[0] - 12 = -12$

$y'' = 12[+2] - 12 = +12$

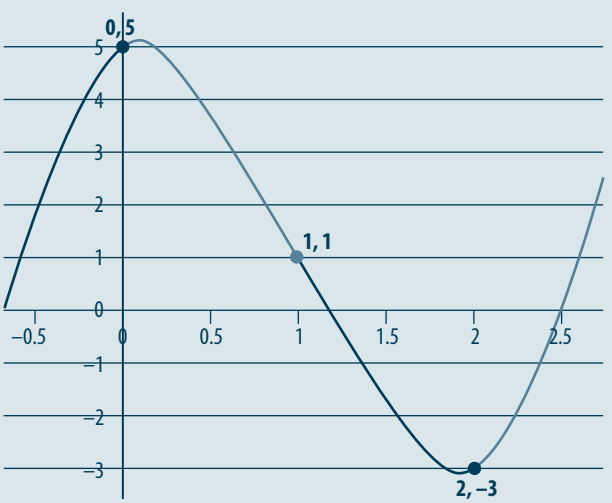
$y = 2x^3 - 6x^2 + 5$

$y = 2[0]^3 - 6[0]^2 + 5$

$y = +5$

Punto máximo (x, y) $(0, +5)$

Si la segunda derivada es menor que cero, la gráfica de f será cóncava hacia abajo en ese intervalo; es decir cuando $f''(x) < 0$ será cóncava hacia abajo presentándose un punto máximo.



Paso 1: Obtención de la primera derivada; *al derivar se obtiene como primera derivada* $y' = 6x^2 - 12x$

Paso 2: Igualación a cero de la primera derivada; $0 = 6x^2 - 12x$

Paso 3: Resolución de la ecuación; *aquí factorizamos, buscando el término común 6x después cada factor se iguala a cero y se obtienen los puntos críticos.*

Paso 4: Obtener la segunda derivada; *aquí derivamos lo ya derivado, para indicar que es segunda derivada se representa doble prima* $y'' = 12x - 12$

Paso 5: Aplicar la prueba de la segunda derivada; al sustituir los puntos críticos en la segunda derivada conoceremos si existe un punto mínimo o un punto máximo o ambos extremos relativos.

Paso 6: Evaluación del punto coordenado; *aquí evaluamos el punto mínimo, para ello sustituimos el valor crítico en la función original.*

Alerta

Cuando la segunda derivada $f''(x) < 0$ es menor que cero se presenta un punto máximo.

Problema resuelto

Obtener el mínimo relativo (si existe) de la función $y = 2x^3 - 6x^2 + 5$

Respuesta

$y = 2x^3 - 6x^2 + 5$

$y' = 6x^2 - 12x$

$0 = 6x^2 - 12x$

Factorizando obtenemos:

$(6x)(x - 2)$

Igualando a cero tenemos:

$6x = 0$

$x = \frac{0}{6} = 0$

$x - 2 = 0$

$x = +2$

Los valores críticos son 0, +2

$y'' = 12x - 12$

$y'' = 12[0] - 12 = -12$

$y'' = 12[+2] - 12 = +12$

Al ser mayor que cero se presenta un mínimo.

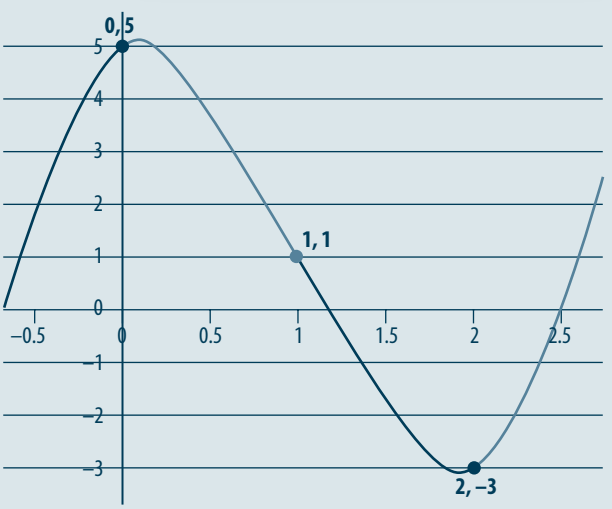
$y = 2x^3 - 6x^2 + 5$

$y = 2[2]^3 - 6[2]^2 + 5$

$y = -3$

Punto mínimo (x, y) $(2, -3)$

Si la segunda derivada es mayor que cero, la gráfica de f será cóncava hacia arriba en ese intervalo; es decir cuando $f''(x) > 0$ será cóncava hacia arriba, presentándose un punto mínimo.



Paso 1: Obtención de la primera derivada; *al derivar se obtiene como primera derivada* $y' = 6x^2 - 12x$

Paso 2: Igualación a cero de la primera derivada; $0 = 6x^2 - 12x$

Paso 3: Resolución de la ecuación; *aquí factorizamos, buscando el término común 6x después cada factor se iguala a cero y se obtienen los puntos críticos.*

Paso 4: Obtener la segunda derivada; *aquí derivamos lo ya derivado, para indicar que es segunda derivada se representa doble prima* $y'' = 12x - 12$

Paso 5: Aplicar la prueba de la segunda derivada; al sustituir los puntos críticos en la segunda derivada conoceremos si existe un punto mínimo o un punto máximo o ambos extremos relativos.

Paso 6: Evaluación del punto coordenado; *aquí evaluamos el punto mínimo, para ello sustituimos el valor critico en la función original.*

Alerta

Cuando la segunda derivada $f''(x) > 0$ es mayor que cero se presenta un punto mínimo.

Problema resuelto

Obtener los máximos, mínimos y punto de inflexión (si existen) de la función $y = -x^3 + 3x + 5$

Respuesta

$$y = -x^3 + 3x + 5$$

$$y' = -3x^2 + 3$$

$$0 = -3x^2 + 3$$

De la fórmula general obtenemos:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\frac{-(0) \pm \sqrt{(0)^2 - 4(-3)(3)}}{2(-3)}$$

$$\frac{0 \pm 6}{-6} = \begin{cases} \frac{0+6}{-6} = \frac{6}{-6} = -1 \\ \frac{0-6}{-6} = \frac{-6}{-6} = +1 \end{cases}$$

Los valores críticos son $-1, +1$

$$y'' = -6x$$

$y'' = -6[-1] = +6$ ← Al ser mayor que cero se presenta un mínimo.

$y'' = -6[+1] = -6$ ← Al ser menor que cero se presenta un máximo.

Punto máximo	Punto mínimo
(x, y)	(x, y)
$(1, 7)$	$(-1, 3)$

Punto de inflexión; *despeja la incógnita de la segunda derivada y evalúala.*

$$y'' = -6x$$

$$6x = 0$$

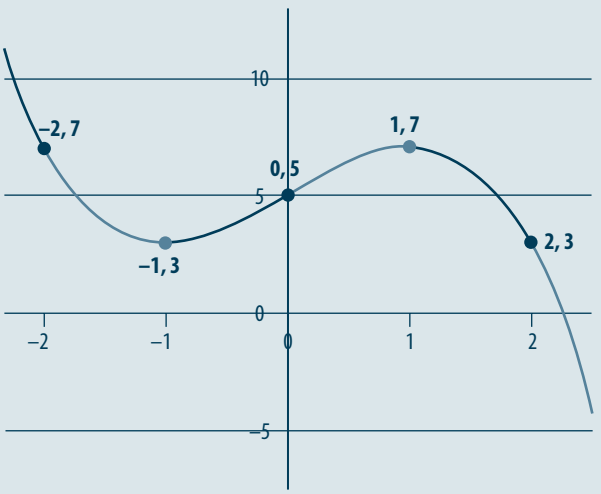
$$x = 0$$

$$y = -x^3 + 3x + 5$$

$$y = -[0]^3 + 3[0] + 5$$

$$y = 5$$

Punto de inflexión (0, 5)



Paso 1: Obtención de la primera derivada; $y' = -3x^2 + 3$

Paso 2: Igualación a cero de la primera derivada; $0 = -3x^2 + 3$

Paso 3: Resolución de la ecuación; *después de igualar a cero se utilizó la fórmula general obteniendo que* $x_1 = -1$ *y* $x_2 = +1$ *los puntos críticos.*

Paso 4: Obtener la segunda derivada

$$y'' = -6x$$

Paso 5: Aplicar la prueba de la segunda derivada; al sustituir los puntos críticos en la segunda derivada, ubicamos si existe un punto mínimo, un punto máximo o ambos.

Paso 6: Evaluación del punto coordenado; *aquí evaluamos el punto mínimo, para ello sustituimos los valores críticos en la función original.*

Alerta

Cuando la segunda derivada $f''(x) = 0$ es igual a cero se presenta el punto de inflexión.

Problema resuelto

Obtener el máximo, el mínimo y el punto de inflexión (si existen) de la función $y = -2x^3 - 6x^2 + 1$

Respuesta

$$y = -2x^3 - 6x^2 + 1$$

$$y' = -6x^2 - 12x$$

$$0 = -6x^2 - 12x$$

Factorizando obtenemos:

$$(-6x)(x + 2)$$

Igualando a cero tenemos:

$-6x = 0$

$$x = \frac{0}{-6} = 0$$

$x + 2 = 0$

$$x = -2$$

Los valores críticos son 0, −2

$$y'' = -12x - 12$$

$$y'' = -12[0] - 12 = -12$$

Al ser menor que cero se presenta un máximo.

$$y'' = -12[-2] - 12 = +12$$

Al ser mayor que cero se presenta un mínimo.

Punto máximo	Punto mínimo
(x, y)	(x, y)
(0, +1)	(−2, −7)

Paso 1: Obtención de la primera derivada;

$$y' = -6x^2 - 12x$$

Paso 2: Igualación a cero de la primera derivada;

$$0 = -6x^2 - 12x$$

Paso 3: Resolución de la ecuación; *aquí factorizamos, buscando él término común −6x después cada factor se iguala a cero y se obtienen los puntos críticos.*

Paso 4: Obtener la segunda derivada

$$y'' = -12x - 12$$

Paso 5: Aplicar la prueba de la segunda derivada; al sustituir los puntos críticos en la segunda derivada conoceremos si existe un punto mínimo o un punto máximo o ambos extremos relativos.

Paso 6: Evaluación del punto coordenado; *aquí evaluamos el punto mínimo, para ello sustituimos el valor critico en la función original.*

Punto de inflexión; *despeja la incógnita de la segunda derivada y evalúala.*

$$y'' = -12x - 12$$

$$12x = -12$$

$$x = \frac{-12}{+12}$$

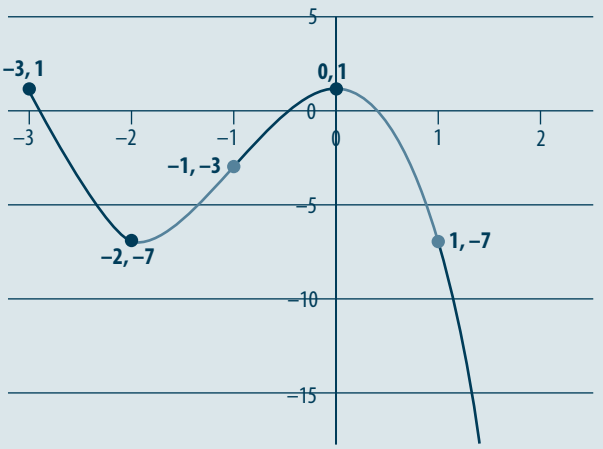
$$x = -1$$

$$y = -2x^3 - 6x^2 + 1$$

$$y = -2[-1]^3 - 6[-1]^2 + 1$$

$$y = -3$$

Punto de inflexión (−1, −3)



Problema resuelto

Obtener los máximos, mínimos y punto de inflexión (si existen) de la función $y = x^3 - 3x$

Respuesta

$y = x^3 - 3x$

$y' = 3x^2 - 3$

$0 = 3x^2 - 3$

De la fórmula general obtenemos:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\frac{-(0) \pm \sqrt{(0)^2 - 4(3)(-3)}}{2(3)} = \frac{0 \pm 6}{6} = \begin{cases} \frac{0+6}{6} = \frac{6}{6} = +1 \\ \frac{0-6}{6} = \frac{-6}{6} = -1 \end{cases}$$

Los valores críticos son $+1, -1$

$y'' = 6x$

$y'' = 6[+1] = +6$ ← Al ser mayor que cero se presenta un mínimo.

$y'' = 6[-1] = -6$ ← Al ser menor que cero se presenta un máximo.

Punto máximo	Punto mínimo
(x, y)	(x, y)
$(-1, 2)$	$(1, -2)$

Punto de inflexión; *despeja la incógnita de la segunda derivada y evalúala.*

$y'' = 6x$

$-6x = 0$

$x = \frac{0}{-6} = 0$

$y = x^3 - 3x$

$y = [0]^3 - 3[0]$

$y = 0$

Punto de inflexión (0, 0)

Paso 1: Obtención de la primera derivada;

$y' = 3x^2 - 3$

Paso 2: Igualación a cero de la primera derivada; $0 = 3x^2 - 3$

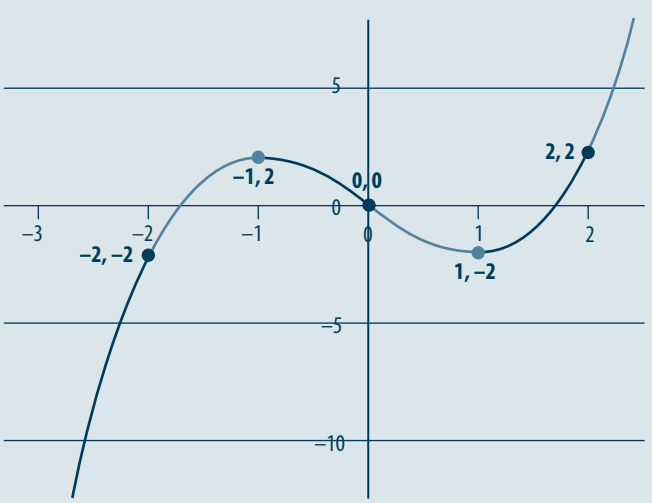
Paso 3: Resolución de la ecuación; *después de igualar a cero se utilizó la fórmula general obteniendo que* $x_1 = +1$ *y* $x_2 = -1$ *los puntos críticos.*

Paso 4: Obtener la segunda derivada

$y'' = 6x - 3$

Paso 5: Aplicar la prueba de la segunda derivada; al sustituir los puntos críticos en la segunda derivada conoceremos si existe un punto mínimo o un punto máximo o ambos.

Paso 6: Evaluación del punto coordenado.



El criterio de la segunda derivada es utilizado para dar solución a planteamientos de aplicaciones administrativas, buscándose máximo ingreso, costo mínimo o utilidad máxima.

4.15 Aplicaciones económicas administrativas

Problema resuelto

Obtener el ingreso máximo de la ecuación $I = 4x^3 - 30x^2 + 48x + 28$

Respuesta

$I = 4x^3 - 30x^2 + 48x + 28$

$I' = 12x^2 - 60x + 48$

Paso 1: Obtención de la primera derivada;

$I' = 12x^2 - 60x + 48$

$0 = 12x^2 - 60x + 48$

Paso 2: Igualación a cero de la derivada;

$0 = 12x^2 - 60x + 48$

$12[0]^2 - 60[0] + 48 = 48$

$12[1]^2 - 60[1] + 48 = 0$

$12[2]^2 - 60[2] + 48 = -24$

$12[3]^2 - 60[3] + 48 = -24$

$12[4]^2 - 60[4] + 48 = 0$

$12[5]^2 - 60[5] + 48 = 48$

Paso 3: Resolución de la ecuación; *aquí tabulamos se asignaron valores arbitrarios a x donde resultó cero será el punto crítico.*

$x_1 = +1$ y $x_2 = +4$

$I'' = 24x - 60$

Paso 4: Obtener la segunda derivada

$I'' = 6x + 6$

Al ser menor que cero tiene un máximo.

$I'' = 24[1] - 60 = -36$

$I'' = 24[4] - 60 = +36$

Al ser mayor que cero tiene un mínimo.

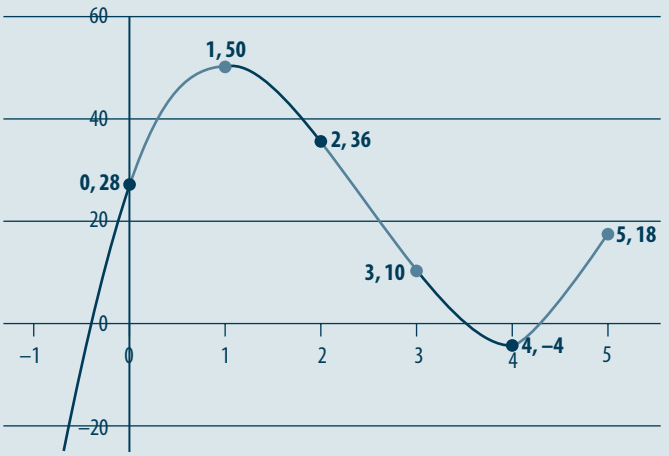
Paso 5: Aplicar la prueba de la segunda derivada; al sustituir el punto crítico en la segunda derivada sabremos cuál es máximo.

$I = 4x^3 - 30x^2 + 48x + 28$

$I = 4[1]^3 - 30[1]^2 + 48(1) + 28$

$I = +50$

Paso 6: Evaluación del punto coordenado; *aquí evaluamos el punto mínimo, para ello sustituimos el valor crítico en la función original.*



El ingreso máximo

Unidades	$
(1	50)

es decir 1 artículo presenta un ingreso máximo de $50.00

Problema resuelto

Obtener el costo mínimo de la ecuación $C = x^3 + 3x^2 - 9x + 20$

Respuesta

$C = x^3 + 3x^2 - 9x + 20$

$C' = 3x^2 + 6x - 9$

$0 = 3x^2 + 6x - 9$

De la fórmula general obtenemos:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\frac{-(6) \pm \sqrt{(6)^2 - 4(3)(-9)}}{2(3)} = \frac{-6 \pm 12}{6} = \begin{cases} \frac{-6+12}{6} = \frac{6}{6} = +1 \\ \frac{-6-12}{6} = \frac{-18}{6} = -3 \end{cases}$$

Paso 1: Obtención de la primera derivada;

$C' = 3x^2 + 6x - 9$

Paso 2: Igualación a cero de la derivada;
$0 = 3x^2 + 6x - 9$

Paso 3: Resolución de la ecuación; *después de igualar a cero se utilizó la fórmula general obteniéndose*

$x_1 = +1$ y $x_2 = -3$

Paso 4: Obtener la segunda derivada

$C'' = 6x + 6$

$C'' = 6x + 6$

$C'' = 6[1] + 6 = +12$ ← Al ser mayor que cero tiene un mínimo.

$C'' = 6[-3] + 6 = -12$ ← Al ser menor que cero tiene un máximo.

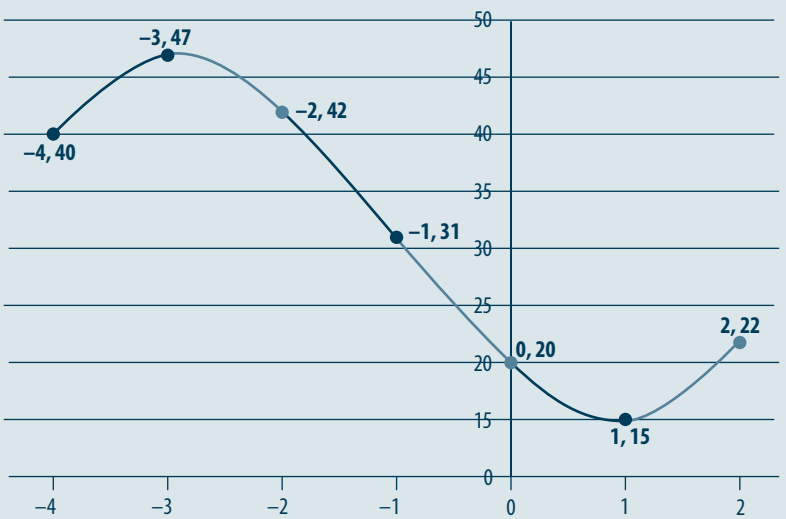
Paso 5: Aplicar la prueba de la segunda derivada; al sustituir el punto crítico en la segunda derivada sabremos cuál es mínimo.

$C = x^3 + 3x^2 - 9x + 20$

$C = [1]^3 + 3[1]^2 - 9(1) + 20$

$C = +15$

Paso 6: Evaluación del punto coordenado; *aquí evaluamos el punto mínimo, para ello sustituimos el valor crítico en la función original.*



El costo mínimo

Unidades	$
(1	15)

es decir 1 artículo tiene un costo mínimo de $15.00

Problema resuelto

Obtener la utilidad máxima esperada de una empresa si presenta ingresos por $I = 2x^3 - 8x^2 + 50x$ los cuales requieren un costo de $C = 10x^2 + 20x - 16$

Respuesta

El problema pide utilidad, por ello las ecuaciones se deben integrar en una sola

$$U = I - C$$

$$U = 2x^3 - 8x^2 + 50x - [10x^2 + 20x - 16]$$

$$U = 2x^3 - 8x^2 + 50x - 10x^2 - 20x + 16$$

$$U = 2x^3 - 18x^2 + 30x + 16$$

$$U' = 6x^2 - 36x + 30$$

Paso 1: Obtención de la primera derivada;

$$U' = 6x^2 - 36x + 30$$

$$0 = 6x^2 - 36x + 30$$

Paso 2: Igualación a cero de la derivada;
$0 = 6x^2 - 36x + 30$

De la fórmula general obtenemos:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\frac{-(-36) \pm \sqrt{(-36)^2 - 4(6)(30)}}{2(6)} = \frac{36 \pm 24}{12} = \begin{cases} \frac{36+24}{12} = \frac{60}{12} = +5 \\ \frac{36-24}{12} = \frac{12}{12} = 1 \end{cases}$$

Paso 3: Resolución de la ecuación; *después de igualar a cero se utilizó la fórmula general obteniéndose*

$$x_1 = +5 \text{ y } x_2 = 1$$

$$U'' = 12x - 36$$

$$U'' = 12[1] - 36 = -24$$

$$U'' = 12[5] - 36 = +24$$

Paso 4: Obtener la segunda derivada

$$U'' = 12x - 36$$

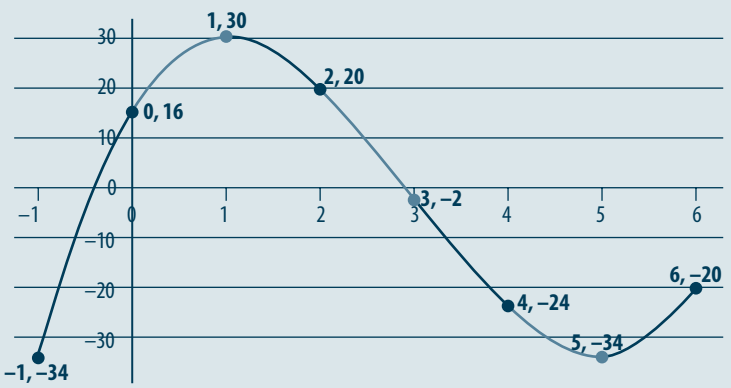
Paso 5: Aplicar la prueba de la segunda derivada; al sustituir el punto crítico sabremos cuál es máximo.

$$U = 2x^3 - 18x^2 + 30x + 16$$

$$U = 2[1]^3 - 18[1]^2 + 30[1] + 16$$

$$U = +30$$

Paso 6: Evaluación del punto coordenado; *el punto máximo.*



La utilidad máxima

Unidades	$
(1	30)

1 artículo tiene una utilidad máxima de $30.00

4.16 El análisis marginal

Otra manera de calcular un punto de maximización, es mediante el empleo de un marginal, concepto utilizado en términos de razones de cambio con respecto de cantidades de unidades producidas o vendidas; en otras palabras es la razón de cambio de las cantidades económicas actualmente establecidas en relación con una unidad adicional.

Los marginales más utilizados en cuestiones económicas

Ingreso marginal **IM** o I'	Es el ingreso adicional que se obtiene al vender una unidad más de un producto o servicio.
Costo marginal **CM** o C'	Es el costo incurrido al producir una unidad más de un producto o servicio.
Utilidad marginal **UM** o U'	Se encuentra representada por la diferencia entre sus ingresos y sus costos. La utilidad marginal representa la ganancia adicional que se obtiene por una unidad añadida.

Alerta

Los marginales se obtienen al derivar.

Adicionalmente a estos conceptos, también se encuentran los promedios marginales, uno de ellos, y quizá el más utilizado es el Costo promedio marginal o el **CPM**.

ALERTA: Recuerda que los Marginales se obtienen Derivando, por lo que si se te presenta un problema que pida obtener un marginal se deberá derivar, pero si en su redacción no solicita un concepto marginal; no se debe derivar, se deberá realizar otra operación y esta será la indicada en la redacción del problema.

Para dar solución a un problema se deben ubicar los datos que indican, así como lo solicitado como resultado, pudiéndose presentar cualquiera de los siguientes supuestos:

Supuestos de soluciones

El problema indica	I	IP	I	I	IP	IP
Lo que se debe hacer	↓	↓	↓	↓	↓	↓
	$\frac{d}{dx}$	$\frac{d}{dx}$	En este supuesto se divide para hacerlo promedio y no se deriva.	En este supuesto se divide para hacerlo promedio y después se deriva.	En este supuesto se multiplica para hacerlo total y no se deriva.	En este supuesto se multiplica para hacerlo total y después se deriva.
	↓	↓	↓	↓	↓	↓
Se pide de resultado	IM	IPM	IP	IPM	I	IM

Si en la redacción se indica una función de ingreso y se pide el ingreso marginal se deberá derivar, en caso de no solicitar un marginal, podrá solicitarse cualquier otro supuesto.

Lo mismo se realiza con el costo, utilidad, gasto o cualquier otro concepto que el problema presente.

Los conceptos marginales

La función es de **Ingreso** y pide *determinar* **Ingreso Marginal**.

La función es de **Costo** y pide obtener **Costo Marginal**.

La función es de **Utilidad** y pide **Utilidad Marginal**.

La función es **Ingreso Promedio** y pide **Ingreso Promedio Marginal**.

La función es **Costo Promedio** y pide **Costo Promedio Marginal**.

La función es **Utilidad Promedio** y pide **Utilidad Promedio Marginal**.

En todos estos casos a la función original solo la debemos derivar, para obtener así su apellido marginal.

VARIANTES DE LAS APLICACIONES

La función es **Ingreso Promedio** y pide **Ingreso Marginal**.

La función es **Costo Promedio** y pide **Costo Marginal**.

La función es **Utilidad Promedio** y pide **Utilidad Marginal**.

La función proporcionada es promediada por lo que aquí primero multiplicaremos para hacerla total y después derivaremos para hacerla marginal.

La función es **Ingreso** y pide **Ingreso Promedio Marginal**.

La función es **Costo** y pide **Costo Promedio Marginal**.

La función es **Utilidad** y pide **Utilidad Promedio Marginal**.

La función proporcionada es total, aquí primero debemos dividir para hacerla promedio y después derivarla para hacerla marginal.

CASOS EN DONDE NO SE DERIVA

La función es **Ingreso** y pide **Ingreso Promedio**.

La función es **Costo** y pide **Costo Promedio**.

La función es **Utilidad** y pide **Utilidad Promedio**.

La función proporcionada es total, aquí solo dividimos no pide hacerla marginal.

Es **Ingreso Promedio** y pide **Ingreso**.

Es **Costo Promedio** y pide **Costo**.

Es **Utilidad Promedio** y pide **Utilidad**.

La función proporcionada está promediada hay que hacerla total para ello hay que multiplicarla.

Aplicación de los supuestos

Para obtener una función marginal se recomiendan los siguientes pasos:

Paso 1: Identificar la información que se proporciona

Ubicar los datos que se proporcionan, para identificar lo que se solicita como solución.

Paso 2: Reconocer lo que solicita el problema

Lo solicitado en el planteamiento del problema será la función a obtenerse, por ello es importante saber si se utilizará la función original o esta deberá adecuarse ya que puede solicitarse una ecuación total, promediada, marginal, promediada marginal y la solución únicamente dependerá de la redacción del problema.

Problema resuelto

El Ingreso de un producto es $I = 8x^5 + 5x^4 + 2x^3 - x^2 + x$ obtener la función de Ingreso Marginal.

Respuesta

$I = 8x^5 + 5x^4 + 2x^3 - x^2 + x$

La función no se adecúa

↓

Solo se deriva

$IM = 40x^4 + 20x^3 + 6x^2 - 2x + 1$

Paso 1: Identificar la información que se proporciona; *aquí es una función de ingreso.*

Paso 2: Reconocer lo que solicita el problema; *el problema solicita ingreso marginal, por ello la función anterior se debe derivar.*

Problema resuelto

El Ingreso de un producto es $I = 8x^5 + 5x^4 + 2x^3 - x^2 + x$ obtener la función de Ingreso promedio.

Respuesta

$I = 8x^5 + 5x^4 + 2x^3 - x^2 + x$

La función debe adecuarse.

↓

Primero debe promediarse.

$$IP = \frac{8x^5}{x} + \frac{5x^4}{x} + \frac{2x^3}{x} - \frac{x^2}{x} + \frac{x}{x}$$

$IP = 8x^4 + 5x^3 + 2x^2 - x + 1$

Paso 1: Identificar la información que se proporciona; *la información proporcionada es una función de ingreso.*

Paso 2: Reconocer lo que solicita el problema; *el problema solicita ingreso promedio, razón por la cual la función anterior debe dividirse para hacerla promedio.*

Problema resuelto

El Ingreso promedio de un producto es $IP = 8x^4 + 5x^3 + 2x^2 - x + 1$ obtener la función de Ingreso promedio marginal.

Respuesta

$IP = 8x^4 + 5x^3 + 2x^2 - x + 1$

La función no se adecúa.

Solo se deriva.

$IPM = 32x^3 + 15x^2 + 4x - 1$

Paso 1: Identificar la información que se proporciona; *aquí es una función de ingreso promedio*

Paso 2: Reconocer lo que solicita el problema; *el problema solicita ingreso promedio marginal, por ello la función anterior se debe derivar.*

Problema resuelto

El Ingreso de un producto es $I = 8x^5 + 5x^4 + 2x^3 - x^2 + x$ obtener la función de Ingreso promedio marginal.

Respuesta

$I = 8x^5 + 5x^4 + 2x^3 - x^2 + x$

La función debe adecuarse.

Primero debe promediarse.

$$IP = \frac{8x^5}{x} + \frac{5x^4}{x} + \frac{2x^3}{x} - \frac{x^2}{x} + \frac{x}{x}$$

$IP = 8x^4 + 5x^3 + 2x^2 - x + 1$

Después debe derivarse.

$IPM = 32x^3 + 15x^2 + 4x - 1$

Paso 1: Identificar la información que se proporciona; *la información proporcionada es una función de ingreso.*

Paso 2: Reconocer lo que solicita el problema; *el problema solicita ingreso promedio, razón por la cual la función anterior debe dividirse para hacerla promedio y después derivarla para hacerla marginal.*

Problema resuelto

El Ingreso promedio es $IP = 8x^4 + 5x^3 + 2x^2 - x + 1$ obtener la función de Ingreso.

Respuesta

$IP = 8x^4 + 5x^3 + 2x^2 - x + 1$

La función debe adecuarse.

Primero debe multiplicarse.

$I = (8x^4 + 5x^3 + 2x^2 - x + 1)x$

$I = 8x^5 + 5x^4 + 2x^3 - x^2 + x$

Paso 1: Identificar la información que se proporciona; *la información proporcionada es de ingreso promedio.*

Paso 2: Reconocer lo que solicita el problema; *el problema solicita ingreso, razón por la cual la función anterior se multiplica para quitarle lo promedio, obteniéndose el Ingreso.*

Problema resuelto

El Ingreso promedio es $IP = 8x^4 + 5x^3 + 2x^2 - x + 1$ obtener la función de Ingreso marginal.

Respuesta

$IP = 8x^4 + 5x^3 + 2x^2 - x + 1$

La función debe adecuarse.

Primero debe multiplicarse.

$I = (8x^4 + 5x^3 + 2x^2 - x + 1)x$

$I = 8x^5 + 5x^4 + 2x^3 - x^2 + x$

Después debe derivarse.

$IM = 40x^4 + 20x^3 + 6x^2 - 2x + 1$

Paso 1: Identificar la información que se proporciona; *la información proporcionada es ingreso promedio.*

Paso 2: Reconocer lo que solicita el problema; *el problema solicita ingreso, razón por la cual la función anterior se multiplica para quitarle lo promedio, obteniéndose el Ingreso y después se deriva para hacerla marginal.*

Problema resuelto

La siguiente ecuación representa la demanda de un producto $P = -0.03q + 12$, donde P representa el precio por unidad y q el número de unidades ofrecidas a ese precio, obtener la función de Ingreso.

Respuesta

$P = -0.03q + 12$

La función debe adecuarse.

Debe multiplicarse.

$I = (-0.03q + 12)q$

$I = -0.03q^2 + 12q$

Paso 1: Identificar la información que se proporciona; *la información proporcionada es una función de demanda*

Paso 2: Reconocer lo que solicita el problema; *el problema solicita ingreso, razón por la cual la función de demanda se multiplica para convertirla en ingreso, obteniéndose la ecuación de Ingreso.*

Problema resuelto

Problema resuelto: Una empresa presenta la siguiente ecuación de demanda $p = \dfrac{-0.04x + 28}{4}$ donde p es el precio y x las unidades, obtener la función de Ingreso marginal.

Respuesta

$$p = \frac{-0.04x + 28}{4}$$

La función debe adecuarse.

Primero debe multiplicarse.

$$I = \left(\frac{-0.04x + 28}{4}\right)x$$

$$I = \frac{-0.04x^2 + 28x}{4}$$

$$I = -0.01x^2 + 7x$$

Después debe derivarse.

$$IM = -0.02x + 7$$

Paso 1: Identificar la información que se proporciona; *la información proporcionada es una función de demanda*

Paso 2: Reconocer lo que solicita el problema; *el problema solicita ingreso, razón por la cual la función anterior se multiplica para convertirla en ingreso, después se derivará para hacerla marginal.*

Nota: Los ejercicios fueron planteados con ingreso, pero el procedimiento es muy similar si nos referimos a costo, utilidad, gasto, etc., lo cambiante será el concepto.

Problema resuelto

Un fabricante tiene como función de demanda $P = -0.2q + 326$ donde P representa el precio y q las unidades, además presenta la siguiente función de costos $C = 3q^2 + 35q + 250$ se busca obtener la función de Ingreso Marginal, Costo Marginal y Utilidad Marginal, evaluando para 10 unidades.

Respuesta

Respuesta del Ingreso

$$p = -0.2q + 326$$

$$I = (-0.2q + 326)q$$

$$I = -0.2q^2 + 326q$$

$$IM = -0.4q + 326$$

$$IM = -0.4(10) + 326 = 322$$

Paso 1: Identificar la información que se proporciona; *la información proporcionada es una función de demanda*

Paso 2: Reconocer lo que solicita el problema; *el problema solicita ingreso, razón por la cual la función anterior se multiplica para convertirla en ingreso, después se derivará para hacerla marginal.*

Respuesta (*continuación*)

Respuesta del Costo

$C = 3q^2 + 35q + 250$

$C = 6q + 35$

$CM = 6(10) + 35 = 95$

Paso 1: Identificar la información que se proporciona; *la información proporcionada es una función de costos.*

Paso 2: Reconocer lo que solicita el problema; *el problema solicita costo, razón por la cual la función sólo se deriva para hacerla marginal.*

Respuesta de la Utilidad

$U = I - C$

$U = -0.2q^2 + 326q - (3q^2 + 35q + 250)$

$U = -0.2q^2 + 326q - 3q^2 - 35q - 250$

$U = -3.2q^2 + 291q - 250$

$UM = -6.4q + 291$

$UM = -6.4(10) + 291$

$UM = 227$

Paso 1: Identificar la información que se proporciona; *la información proporcionada es una ecuación de ingresos y una función de costos.*

Paso 2: Reconocer lo que solicita el problema; *el problema solicita utilidad, razón por la cual se complementan ambas funciones para después derivarla para hacerla marginal.*

Problema resuelto

Una empresa analizó la demanda de un producto encontrando que si el precio es de $125.00 vende 25 piezas y que cuando el precio es de $75.00 vende 50 piezas, la empresa desea obtener el Ingreso Marginal si se venden 6 unidades.

Respuesta

(x, y)

(artículo, precio)

$(25, 125)$
$(50, 75)$ } Los datos del problema

La función debe

Resolverse.

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Paso 1: Identificar la información que se proporciona; *la información proporcionada se utiliza para resolver el ejercicio por medio de la línea recta.*

Respuesta (*continuación*)

$$y - 125 = \frac{75 - 125}{50 - 25}(x - 25)$$

$$y - 125 = \frac{-50}{25}(x - 25)$$

$$y - 125 = -2(x - 25)$$

$$y - 125 = -2x + 50$$

$$y = -2x + 50 + 125$$

$$y = -2x + 175$$

La función de ingreso es $I = p(x)$ razón por la cual p representa el precio y x las unidades adecuando la ecuación tenemos:

$$I = (-2x + 175)x$$

$$I = -2x^2 + 175x$$

Después debe derivarse.

Paso 2: Reconocer lo que solicita el problema; *el problema solicita ingreso, razón por la cual la ecuación anterior se multiplica para convertirla en ingreso, después se derivará para hacerla marginal.*

$$IM = -4x + 175$$

$$IM = -4(6) + 175$$

$$IM = 151$$

Problemas para resolver

Calcula las derivadas de las siguientes funciones.

4.1 $y = x + 10$

4.2 $y = -x + 2$

4.3 $y = 2x + 0.0000033$

4.4 $y = 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x$

4.5 $y = -2x^2 + \sqrt{x^5} + x$

4.6 $y = -2x + \sqrt{x} + 33$

4.7 $y = -2x + \sqrt[4]{x^3} - 5\,000\,000$

4.8 $y = (2x^4)(x^3)$

4.9 $y = (2x^3 + 2x^2)(2x^4 + 2x)$

4.10 $y = (-12x^3 + 5x^2)(-15x^3 - 3x^2 + 1x)$

4.11 $y = (2x^4 + 5x)(23x^3 + 3x + 2)$

4.12 $y = (2x^4 + 2x^3)(2x^4 + 2x^3)$

4.13 $y = \dfrac{9x^2}{x}$

4.14 $y = \dfrac{x^2 + x}{x^2 - x}$

4.15 $y = \dfrac{-x^2 - x}{x^2 - x}$

4.16 $y = \dfrac{2x^3 - x^2}{x^3 - 4x}$

4.17 $y = \dfrac{2x^3 + 2x^2 - x^2}{x^3 - 4x}$

4.18 $y = \dfrac{-x^4 - 7x^3 - x}{x + 2}$

4.19 $y = \dfrac{-x^4 - 3x^3 - x}{-x - 8}$

4.20 $y = \dfrac{-x^4 - 7x^3 + 2x}{3x^2 + 2x}$

4.21 $y = (-2x^4 + 8x^3)^5$

4.22 $y = (-2x^3 + 0.25x^2 + x)^6$

4.23 $y = \left(\dfrac{x^2 - 1}{x + 1}\right)^2$

4.24 $y = \left(\dfrac{-8x^2 + 5x + 3}{-x + 1}\right)^2$

Obtener la ecuación de la recta tangente de las funciones en los puntos indicados.

4.25 $f(x) = 2x^2 + 4x - 2$ en el punto $(0, -2)$

4.26 $f(x) = -2x^2 + 4x - 2$ en el punto $(0, -2)$

4.27 $f(x) = x^2 + 2x$ en el punto $(-4, 8)$

4.28 $f(x) = -2x^2 - 2x - 2$ en el punto $(-2, -6)$

4.29 $f(x) = x^2 + 2x + 3$ en el punto $(4, 27)$

4.30 $f(x) = -\dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{5}{2}x$ en el punto $(2, -6)$

4.31 $f(x) = \dfrac{3}{5}x^2 + \dfrac{9}{5}x + \dfrac{1}{4}$ en el punto $(3, 11)$

4.32 $f(x) = -\dfrac{9}{2}x^2 - \dfrac{6}{3}x - \dfrac{12}{4}$ en el punto $(-1, -6)$

4.33 $f(x) = 4x^2 + 4x + 4$ para $x = 6$

4.34 $f(x) = -x^2 + 2x - 3$ para $x = 0$

4.35 $f(x) = 8x^2 + 4x + 2$ para $x = 1$

4.36 $f(x) = -5x^2 - 4x - 3$ para $x = -2$

4.37 $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ en el punto $(0, 4)$

4.38 $f(x) = +x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ en el punto $(2, 26)$

4.39 $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ en el punto $(-2, -2)$

4.40 $f(x) = -x^3 - 2x^2 - 3x - 4$ en el punto $(0, -4)$

Empleando el criterio de la primera derivada, ubicar y graficar los extremos relativos indicando si la función pasa de creciente a decreciente o viceversa.

4.41 $y = 2x^3 + 15x^2$

4.42 $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x$

4.43 $y = -3x^3 + 36x$

4.44 $y = 5x^3 + 24x^2$

4.45 $y = -5x^3 + 6x^2 + 36x$

Empleando el criterio de la segunda derivada, calcula máximos, mínimos y punto de inflexión, si los hay, de los siguientes ejercicios.

4.46 $y = 2x^3 + 15x^2$

4.47 $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x$

4.48 $y = -3x^3 + 36x$

4.49 $y = 5x^3 + 24x^2$

4.50 $y = -5x^3 + 6x^2 + 36x$

4.51 $y = -10x^3 + 30x - 1$

4.52 $y = -2x^3 + 24x - 4$

4.53 $y = x^3 + x^2 - x + 1$

4.54 $y = -x^3 - 3x^2 + 33$

4.55 $y = -x^3 - 3x^2 + 9x + 33$

4.56 Obtener el máximo ingreso de la empresa, si su función es: $I = -3x^3 + 9x^2 + 72x$

4.57 Obtener el costo mínimo de producción de la empresa "Artículos de lujo" si el administrador sabe que la función de producción es: $C = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 89$

4.58 Obtener el máximo rendimiento de:
$U = -4x^3 + 60x^2 + 100$

4.59 Un empresario sabe que $C_t = 0.6x^3 - 36x^2 + 35\,000$. Si el empresario no desea retirar el artículo producido, ¿cuántas unidades como límite debe realizar para lograr un costo mínimo?

4.60 Obtener la utilidad máxima esperada por la empresa al presentarse las funciones de ingreso y costo de un producto.

$I = -10x^3 + 45x^2 - 3x$

$C = 15x^2 - 3x$

4.61 Obtener la utilidad máxima esperada con las siguientes funciones.

$I = -x^3 + 20x + 5$

$C = x^3 - 7x^2 + 8x + 41$

4.62 Una compañía ha descubierto que el ingreso total por la venta de sus productos se presenta en relación con la siguiente función: $I = -20x^3 + 120x$. El empresario se pregunta, ¿cuál es el precio máximo que los compradores estarían dispuestos a pagar?

Obtener los marginales siguientes.

4.63 Obtener el ingreso marginal de una empresa que presenta como función $I = -4x^3 + 50x^2 + 9x + 10$ evaluándola a tres unidades

4.64 Obtener el costo marginal de la función $C = 8x^3 - 2x^2 + 3x$ costeando esta para 11 artículos

4.65 Obtener el ingreso marginal de una empresa, si su función de ingreso promedio es $IP = -x^3 + 52x^2 + 10x$ evaluándola a seis unidades

4.66 Obtener la utilidad marginal de una empresa cuando su función de ingresos es $I = -x^3 + 52x^2 + 9x + 10$ y su función de costos es $C = x^3 - 8x^2 + 3x$ evaluándola a dos unidades

4.67 La siguiente función representa el costo de un producto: $C = 12x^3 - 7x^2 + 9x$. Obtener el costo promedio marginal evaluando a cuatro unidades

4.68 Obtener el costo promedio marginal de la función $CP = 6x^4 - 24x^3 - 2x^2 - 9x$ evaluando para 10 unidades

4.69 Obtener el costo marginal de la función $CP = 6x^4 - 24x^3 - 2x^2 - 9x$ evaluando para 10 unidades

4.70 La siguiente función representa el costo promedio del producto de moda: $CP = 2x^4 - x^3 + 4x^2 + 8x + 5$. Obtener la función de costo evaluando a 5 unidades

PROBLEMAS RETO

Resuelve los siguientes problemas

1. Una empresa vende semanalmente 500 piezas del artículo Z-24, a un precio de $120.00 cada una; desea cerrar su mes con una buena venta, por lo que ha decidido reducir un 25% el precio actual, pensando que con ello las ventas se incrementarán 20%. Obtener el máximo ingreso que puede esperarse.

2. Un artículo tiene un costo de producción de $100.00 y dos artículos cuesta producirlos $80.00. Si se sabe que los costos están representados por la siguiente función: $C = 80x - 80$, indicar cuál será el máximo rendimiento que se espera.

3. Una empresa lanchera, cuando zarpa a máxima capacidad, presenta un costo de boleto de $100.00, pero por cada boleto no vendido, el capitán sabe que el costo del boleto se incrementa 10 unidades monetarias. Si la embarcación es para 50 turistas, determina con cuántos turistas se alcanza el ingreso máximo.

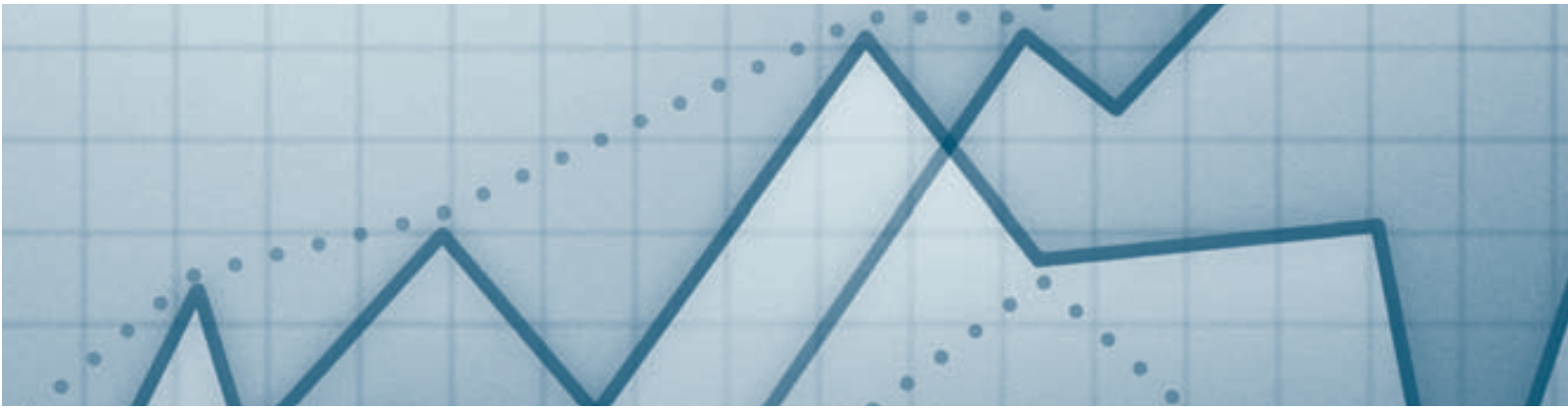
4. Obtener la función de ingreso evaluando para 10 unidades si se indica la ecuación $2q = p + 5$, donde ***p*** es precio por unidad y ***q*** el número de unidades ofrecidas a ese precio.

5. En una empresa el costo total es $C_t = x^2 - 30x + 800$, donde x representa las unidades de producción y C_t el costo total de producirlo.

   a) Si se desea minimizar el costo, ¿cuál es el límite de producción a fin de no obtener pérdida en la producción?

   b) ¿De cuánto es el costo marginal?

UNIDAD 5



Integrales, integral definida, totalizadores, excedentes de productor y consumidor

OBJETIVOS

- Obtener una antiderivada.
- Aplicar las principales reglas de integración.
- Identificar las distintas reglas de integración.
- Resolver integrales indefinidas.
- Identificar a *c* como la constante de integración de las integrales indefinidas.
- Resolver integrales definidas.
- Ubicar en las integrales definidas los intervalos de las mismas.
- Identificar las distintas aplicaciones administrativas en las integrales.
- Interpretar los resultados totalizados.

¿QUÉ SABES?

- ¿La Primitiva de una función es una integral?
- ¿Una integral definida presentará constante de integración?
- ¿Una integral con intervalo, es una integral definida?
- ¿La integral por sustitución realiza cambio de variable?
- ¿En las aplicaciones de la integral, la constante de integración es el costo fijo?
- ¿Los excedentes de consumidor y productor son aplicaciones de la integral?
- ¿Las funciones totales se obtienen integrando un marginal?

Alerta

Una integral es una antiderivada; la primitiva de una función.

5.1 Introducción

Entiéndase la integral como el proceso de encontrar la función primitiva; la operación contraria a la derivación se conoce como Antidiferenciación o Integración.

5.2 Integral

Entiéndase como integral el proceso inverso de la derivación, buscando hallar una antiderivada de *f*, la primitiva de una función, el proceso de integrar una función cuya derivada se conoce, se identifica como Antiderivada o Integral Indefinida.

Como recordaras en la unidad anterior al derivar eliminábamos el valor constante, en la integración por el contrario lo agregaremos; aquí al integrar una función indefinida se agrega una *c, identificando esa c* como una constante cualquiera; la constante de integración.

Al igual que en la unidad anterior el cálculo integral es fácil de desarrollar; la dificultad recae en entender las fórmulas para saber en qué momento aplicar una y en qué momento otra.

Fórmulas para integrar

Las fórmulas expuestas son las más utilizadas en la aplicación de este tema:

$$\int (du + dv - dw) = \int du + \int dv - \int dw$$

$$\int a\,dx = a\int dx \qquad a = cte$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int dx = x + c$$

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln f(x) + c$$

ALERTA: El formulario aquí expuesto es limitado, dado que la intención de esta unidad es enseñarte las reglas básicas para aprender a integrar, si requieres profundizar en el tema, debes buscar un libro especializado en la materia.

Símbolo de la Integral

Es posible identificar una integral por medio de su símbolo de integración $\int$ donde su visualización es: $\int f(x)\,dx$ detallaremos a continuación algunas.

5.3 Reglas de integración

Para integrar es necesario observar el ejercicio para saber si los términos se replantean, despejan, se resuelven por sustitución o simplemente se separan para su integración.

Regla de la suma

En la fórmula los signos pueden ser + o −

Fórmula 1: $$\int (du + dv - dw) = \int du + \int dv - \int dw$$

Esta fórmula se utiliza cuando se presenta una sumatoria de términos, iniciando con la separación de cada uno con sus respectivos signos y su ***dx***.

Para poder integrar, lo primero es separar

Así se podrá aplicar la fórmula 2.

Regla de la constante (el retiro del coeficiente numérico)

Fórmula 2: $\int a\,dx = a\int dx \qquad a = cte$

Anteriormente, se indicó que para integrar una función primero separamos cada uno de sus términos; aquí puede verse el por qué: los separamos para poder retirar la constante de la integral (el coeficiente numérico de cada término).

Retirar el coeficiente numérico, pasándolo antes de la $\int$

Así se podrá aplicar la fórmula 3.

Regla de la potencias (la fórmula de integración)

Fórmula 3: $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$

Alerta

En las integrales al exponente se le suma la unidad y se divide entre el exponente más uno.

En este paso nuestro símbolo de integración contiene únicamente literales elevadas a cualquier potencia, por lo que puede aplicarse esta fórmula al sumarle uno al exponente y dividirlo entre el exponente más uno.

Fórmula final $\int dx = x + c$

En ocasiones al finalizar el ejercicio, si la expresión presenta la forma $\int dx$, deberá agregarse $\boldsymbol{x + c}$.

A continuación, se presentan los pasos que explican cómo se da solución a ejercicios de integrales:

Paso 1: Adecuación o solución del ejercicio

Replanteamos, despejamos, resolvemos por sustitución o separamos los términos para integrarlos; y obtener una presentación similar a la siguiente:

$$\pm\int \blacktriangle x^n\,dx \pm \int \blacksquare\,dx$$

Paso 2: El retiro del coeficiente numérico

El coeficiente numérico es sacado de la integral para ubicar en la integral solo variables elevadas a cualquier exponente^n.

$$\pm\blacktriangle\int x^n\,dx \pm\blacksquare\int dx$$

Paso 3: Integración y simplificación

Al tener dentro de la integral solo variables elevadas a su exponente, aplicamos la regla de la potencia e integramos, si al final de la solución el ejercicio presenta $\int dx$ se deberá agregar $x + c$.

$$\pm\blacktriangle\frac{x^{n+1}}{n+1} \pm\blacksquare x + c$$

Problema resuelto

$\int (9x^2 + 12x - 5)\,dx$

Respuesta

$$\int (9x^2 + 12x - 5)\,dx$$

$$\int 9x^2\,dx + \int 12x\,dx - \int 5\,dx$$

$$9\int x^2\,dx + 12\int x\,dx - 5\int dx$$

$$9\frac{x^{2+1}}{2+1} + 12\frac{x^{1+1}}{1+1} - 5x + c$$

$$9\frac{x^3}{3} + 12\frac{x^2}{2} - 5x + c$$

$$3x^3 + 6x^2 - 5x + c$$

Paso 1: Adecuación o solución del ejercicio; *aquí damos solución separando los términos para aplicar los pasos siguientes, colocándole a cada término su símbolo de integración y su dx.*

Paso 2: El retiro del coeficiente numérico; *los coeficientes numéricos se colocan antecediendo la integral.*

Paso 3: Integración y simplificación; *se integrará sumando al exponente la unidad y dividirlo entre exponente más 1, reduciendo la función hasta su mínima expresión.*

Problema resuelto

$$\int (\sqrt{x})\,dx$$

Respuesta

$$\int (\sqrt{x})\,dx$$

Como el índice de la raíz es dos y el exponente de x es uno, la fracción que se obtiene es $x^{\frac{1}{2}}$.

$$\int (x^{\frac{1}{2}})\,dx$$

$$1\int x^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$1\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c$$

$$1\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$$

Paso 1: Adecuación o solución del ejercicio; *aquí replanteamos el ejercicio para aplicar los pasos siguientes, colocándole al término replanteado su dx.*

Paso 2: El retiro del coeficiente numérico; *los coeficientes numéricos se colocan antecediendo la integral, en este caso un 1.*

Paso 3: Integración y simplificación; *se integrará sumando al exponente la unidad, dividiéndolo entre el exponente más 1, reduciendo la función hasta su mínima expresión.*

Problema resuelto

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

Respuesta

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

Como el índice de la raíz es dos y el exponente de x es a la uno, la fracción que se obtiene es $x^{\frac{1}{2}}$ pero al reubicarse cambia de signo.

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$1\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$1\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+c$$

$$1\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c$$

$$2x^{\frac{1}{2}}+c$$

$$2\sqrt{x}+c$$

Paso 1: Adecuación o solución del ejercicio; *aquí replanteamos el ejercicio, la raíz del denominador la colocamos como potencia del numerador aplicándose los siguientes pasos.*

Paso 2: El retiro del coeficiente numérico; *los coeficientes numéricos se colocan antecediendo la integral, en este caso un 1.*

Paso 3: Integración y simplificación; *se integrará sumando al exponente la unidad, dividiéndolo entre el exponente más 1, reduciendo la función hasta su mínima expresión.*

Problema resuelto

$$\int (\sqrt[6]{x^5})\,dx$$

Respuesta

$$\int (\sqrt[6]{x^5})\,dx$$

Como el índice de la raíz es seis y el exponente de x es cinco, la fracción que se obtiene es $x^{\frac{5}{6}}$.

$$\int x^{\frac{5}{6}}\,dx$$

$$1\frac{x^{\frac{5}{6}+1}}{\frac{5}{6}+1}+c$$

$$1\frac{x^{\frac{11}{6}}}{\frac{11}{6}}+c$$

$$\frac{6}{11}x^{\frac{11}{6}}+c$$

Paso 1: Adecuación o solución del ejercicio; *aquí replanteamos el ejercicio, la raíz se transforma en una potencia y se aplican los pasos siguientes.*

Paso 2: El retiro del coeficiente numérico; *los coeficientes numéricos se colocan antecediendo la integral, en este caso un 1.*

Paso 3: Integración y simplificación; *se integrará sumando al exponente la unidad, dividiéndolo entre el exponente más 1, reduciendo la función hasta su mínima expresión.*

Problema resuelto

$$\int\left(\frac{5}{\sqrt{x}}\right)dx$$

Respuesta

$$\int\left(\frac{5}{\sqrt{x}}\right)dx$$

$$\int\frac{5}{x^{\frac{1}{2}}}dx$$

$$\int(5x^{-\frac{1}{2}})\,dx$$

$$5\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$5\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+c$$

$$5\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c$$

$$10x^{\frac{1}{2}}+c$$

$$10\sqrt{x}+c$$

Paso 1: Adecuación o solución del ejercicio; *aquí replanteamos el ejercicio, el valor del denominador se coloca en el numerador y se aplican los siguientes pasos.*

Paso 2: El retiro del coeficiente numérico; *los coeficientes numéricos se colocan antecediendo la integral, en este caso el 5.*

Paso 3: Integración y simplificación; *se integrará sumando al exponente la unidad, dividiéndolo entre el exponente más 1, reduciendo la función hasta su mínima expresión.*

Problema resuelto

$$\int\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$$

Respuesta

$$\int\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$$

$$\int(x+x^{-\frac{1}{2}})\,dx$$

$$1\int x\,dx+1\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$1\frac{x^{1+1}}{1+1}+1\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+c$$

$$1\frac{x^{2}}{2}+1\frac{x^{+\frac{1}{2}}}{+\frac{1}{2}}+c$$

Paso 1: Adecuación o solución del ejercicio; *aquí replanteamos una parte del ejercicio, colocando la raíz del denominador en potencia del numerador, aplicando los pasos siguientes.*

Paso 2: El retiro del coeficiente numérico; *los coeficientes numéricos se sacan de la integral, aquí sacamos los unos.*

Paso 3: Integración y simplificación; *se integrará sumando al exponente la unidad, dividiéndolo entre el exponente más 1, reduciendo la función hasta su mínima expresión.*

Respuesta (*continuación*)

$$\frac{1}{2}x^2 + 2x^{\frac{1}{2}} + c$$

$$\frac{1}{2}x^2 + 2\sqrt{x} + c$$

Problema resuelto

$$\int (x^2\sqrt{x})\,dx$$

Respuesta

$$\int (x^2\sqrt{x})\,dx$$

$$\int (x^2 x^{\frac{1}{2}})\,dx$$

Al resolverla se aplica la ley de los exponentes $x^m * x^n = x^{m+n}$

$$\int (x^{\frac{4}{2}} x^{\frac{1}{2}})\,dx$$

$$1\int x^{\frac{5}{2}}\,dx$$

$$1\frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} + c$$

$$1\frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + c$$

$$\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + c$$

$$\frac{2}{7}\sqrt{x^7} + c$$

Paso 1: Adecuación o solución del ejercicio; *aquí replanteamos una parte del ejercicio, transformando la raíz en una potencia, multiplicando después los términos, al aplicar la ley de los exponentes.*

Paso 2: El retiro del coeficiente numérico; *los coeficientes numéricos se colocan antecediendo la integral, en este caso el 1 por la operación efectuada.*

Paso 3: Integración y simplificación; *se integrará sumando al exponente la unidad, dividiéndolo entre el exponente más uno, reduciendo la función hasta su mínima expresión.*

Problema resuelto

$$\int \frac{5}{2\sqrt{x}}\,dx$$

Respuesta

$$\int \frac{5}{2\sqrt{x}}\,dx$$

$$\int \frac{5}{2x^{\frac{1}{2}}}\,dx$$

$$\frac{5}{2}\int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx$$

Paso 1: Adecuación o solución del ejercicio; *aquí replanteamos una parte del ejercicio, transformando la raíz en una potencia, multiplicando después los términos, al aplicar la ley de los exponentes.*

Respuesta (*continuación*)

$$\frac{5}{2}\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

Paso 2: El retiro del coeficiente numérico; *los coeficientes numéricos se colocan antecediendo la integral, en este caso* $\frac{5}{2}$ *sale de la integral.*

$$\frac{5}{2}\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+c$$

Paso 3: Integración y simplificación; *se integrará sumando al exponente la unidad, dividiéndolo entre el exponente más 1, reduciendo la función hasta su mínima expresión.*

$$\frac{5}{2}\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c$$

$$5x^{\frac{1}{2}}+c$$

$$5\sqrt{x}+c$$

Problema resuelto

$$\int\frac{5x\,dx}{2\sqrt{x}}$$

Respuesta

$$\int\frac{5x\,dx}{2\sqrt{x}}$$

Paso 1: Adecuación o solución del ejercicio; *aquí replanteamos una parte del ejercicio, transformando la raíz en una potencia, multiplicando después los términos, al aplicar la ley de los exponentes.*

$$\int\frac{5x\,dx}{2x^{\frac{1}{2}}}\,dx$$

$$\frac{5}{2}\int\frac{x\,dx}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx$$

Al resolverla se aplica la ley de los exponentes $x^m * x^n = x^{m+n}$

$$\frac{5}{2}\int x^1x^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

Paso 2: El retiro del coeficiente numérico; *los coeficientes numéricos se colocan antecediendo la integral, en este caso* $\frac{5}{2}$ *sale de la integral.*

$$\frac{5}{2}\int x^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$\frac{5}{2}\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+c$$

Paso 3: Integración y simplificación; *se integrará sumando al exponente la unidad, dividiéndolo entre el exponente más 1, reduciendo la función hasta su mínima expresión.*

$$\frac{5}{2}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c$$

$$\frac{5}{3}x^{\frac{3}{2}}+c$$

$$\frac{5}{3}\sqrt{x^3}+c$$

Problema resuelto

$$\int\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)dx$$

Respuesta

$$\int\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)dx$$

$$\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}\right)dx$$

$$\frac{x^m}{x^n}=x^{m-n}$$

$$\int(x^{-2}+1)\,dx$$

$$1\int x^{-2}\,dx+1\int dx$$

$$1\frac{x^{-2+1}}{-2+1}+1x+c$$

$$1\frac{x^{-1}}{-1}+1x+c$$

$$-1x^{-1}+1x+c$$

$$x^{-n}=\frac{1}{x^n}$$

$$\frac{-1}{x}+x+c$$

Paso 1: Adecuación o solución del ejercicio; *aquí replanteamos, separando la expresión, colocándole a cada término su denominador, aplicando después la ley de los exponentes de la división.*

Paso 2: El retiro del coeficiente numérico; *los coeficientes numéricos se colocan antecediendo la integral, aquí se sacan dos unos.*

Paso 3: Integración y simplificación; *se integrará sumando al exponente la unidad, dividiéndolo entre el exponente más 1, reduciendo la función hasta su mínima expresión.*

Problema resuelto

$$\int\left(\frac{x^4+10}{x^2}\right)dx$$

Respuesta

$$\int\left(\frac{x^4+10}{x^2}\right)dx$$

$$\int\left(\frac{x^4}{x^2}+\frac{10}{x^2}\right)dx$$

$$\int\left(x^2+\frac{10}{x^2}\right)dx$$

$$\frac{x^m}{x^n}=x^{m-n}$$

$$\int(x^2+10x^{-2})\,dx$$

$$1\int x^2\,dx+10\int x^{-2}\,dx$$

Paso 1: Adecuación o solución del ejercicio; *aquí replanteamos, separamos colocándole a cada término su denominador, aplicando la ley de los exponentes de la división.*

Paso 2: El retiro del coeficiente numérico; *los coeficientes numéricos se colocan antecediendo la integral, aquí se saca el 1 y el 10*

Respuesta (*continuación*)

$$1\frac{x^{2+1}}{2+1} + 10\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c$$

$$1\frac{x^3}{3} + 10\frac{x^{-1}}{-1} + c$$

$$\frac{1}{3}x^3 - 10x^{-1} + c$$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

$$\frac{1}{3}x^3 - \frac{10}{x} + c$$

Paso 3: Integración y simplificación; *se integrará sumando al exponente la unidad, dividiéndolo entre el exponente más 1, reduciendo la función hasta su mínima expresión.*

Problema resuelto

$$\int\left(x^3 + x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}x\right)dx$$

Respuesta

$$\int\left(x^3 + x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}x\right)dx$$

Paso 1: Adecuación o solución del ejercicio; *aquí se separa la expresión, colocándole a cada término su dx.*

$$1\int x^3\,dx + 1\int x^{\frac{1}{3}}\,dx + \frac{1}{2}\int x\,dx$$

Paso 2: El retiro del coeficiente numérico; *los coeficientes numéricos se colocan antecediendo la integral.*

$$1\frac{x^{3+1}}{3+1} + 1\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + \frac{1}{2}\frac{x^{1+1}}{1+1} + c$$

Paso 3: Integración y simplificación; *se integrará sumando al exponente la unidad, dividiéndolo entre el exponente más 1, reduciendo la función hasta su mínima expresión.*

$$1\frac{x^4}{4} + 1\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + c$$

$$\frac{1x^4}{4} + \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} + \frac{1x^2}{4} + c$$

$$\frac{1x^4}{4} + \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4} + \frac{1x^2}{4} + c$$

Problema resuelto

$$\int(3x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{1}{3}})\,dx$$

Respuesta

$$\int(3x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{1}{3}})\,dx$$

Paso 1: Adecuación o solución del ejercicio; *aquí se separa la expresión, colocándole a cada término su dx.*

$$3\int x^{\frac{4}{3}}\,dx + 1\int x^{\frac{1}{3}}\,dx$$

Paso 2: El retiro del coeficiente numérico; *los coeficientes numéricos se colocan antecediendo la integral.*

Respuesta (*continuación*)

$$3\frac{x^{\frac{4}{3}+1}}{\frac{4}{3}+1}+1\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+c$$

$$3\frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}}+1\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+c$$

$$\frac{9x^{\frac{7}{3}}}{7}+\frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4}+c$$

$$\frac{9\sqrt[3]{x^7}}{7}+\frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4}+c$$

Paso 3: Integración y simplificación; *se integrará sumando al exponente la unidad, dividiéndolo entre el exponente más 1, reduciendo la función hasta su mínima expresión.*

Problema resuelto

$$\int\left(\frac{2}{5}x^4+3x^{\frac{5}{4}}-\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt[4]{x^5}}-2x\right)dx$$

Respuesta

Separamos

$$\int\frac{2}{5}x^4\,dx+\int 3x^{\frac{5}{4}}\,dx-\int\sqrt{x}\,dx-\int\frac{2}{\sqrt[4]{x^5}}\,dx-\int 2x\,dx$$

Paso 1: Adecuación o solución del ejercicio; *aquí separamos y replanteamos el ejercicio, transformamos las raíces para trabajarlas como potencias.*

El replanteo

$$-\int x^{\frac{1}{2}}\,dx-\int\frac{2}{x^{\frac{5}{4}}}\,dx$$

$$-\int x^{\frac{1}{2}}\,dx-\int 2x^{-\frac{5}{4}}\,dx$$

El ejercicio a resolver

$$\int\frac{2}{5}x^4\,dx+\int 3x^{\frac{5}{4}}\,dx-\int x^{\frac{1}{2}}\,dx-\int 2x^{-\frac{5}{4}}\,dx-\int 2x\,dx$$

$$\frac{2}{5}\int x^4\,dx+3\int x^{\frac{5}{4}}\,dx-1\int x^{\frac{1}{2}}\,dx-2\int x^{-\frac{5}{4}}\,dx-2\int x\,dx$$

Paso 2: El retiro del coeficiente numérico; *los coeficientes numéricos se colocan antecediendo la integral.*

Integrando la función

$$\frac{2}{5}\frac{x^{4+1}}{4+1}+3\frac{x^{\frac{5}{4}+1}}{\frac{5}{4}+1}-1\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}-2\frac{x^{-\frac{5}{4}+1}}{-\frac{5}{4}+1}-2\frac{x^{1+1}}{1+1}+c$$

$$\frac{2}{5}\frac{x^5}{5}+3\frac{x^{\frac{9}{4}}}{\frac{9}{4}}-1\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-2\frac{x^{-\frac{1}{4}}}{-\frac{1}{4}}-2\frac{x^2}{2}+c$$

Respuesta (*continuación*)

Simplificando la función

$$\frac{2}{25}x^5 + \frac{4}{3}x^{\frac{9}{4}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 8x^{-\frac{1}{4}} - 1x^2 + c$$

$$\frac{2}{25}x^5 + \frac{4}{3}x^{\frac{9}{4}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{8}{x^{\frac{1}{4}}} - 1x^2 + c$$

$$\frac{2}{25}x^5 + \frac{4}{3}x^{\frac{9}{4}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{8}{\sqrt[4]{x}} - 1x^2 + c$$

Paso 3: Integración y simplificación; *las funciones se simplifican reduciéndose hasta su mínima expresión.*

5.4 Reglas especiales de integración

Integración por sustitución

Un procedimiento de integración no tan utilizado, es la integración por sustitución, la cual consiste en definir una función favorable para obtener su diferencial y sustituir.

Problema resuelto

$$\int 2x(x^2+1)^2\,dx$$

Respuesta

Paso 1: Adecuación o solución del ejercicio; *aquí replanteamos y se utiliza la integral por sustitución.*

$$\int 2x(x^2+1)^2\,dx$$

Por fórmula

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$$

$$u = \begin{cases} f(x) \\ x^2+1 \end{cases}$$

$$du = \begin{cases} f'(x)\,dx \\ 2x\,dx \end{cases}$$

Al ser ***du = 2x*** *el integrando cumple con la fórmula de sustitución*

Al sustituir tenemos:

$$\int (u)^2\,du$$

$$1\int (u)^2\,du$$

$$1\frac{(u)^{2+1}}{2+1} + c$$

$$1\frac{(u)^3}{3} + c$$

$$\frac{1}{3}(u)^3 + c$$

$$\frac{1(x^2+1)^3}{3} + c$$

Paso 2: El retiro del coeficiente numérico; *el coeficiente numérico que se coloca antecediendo la integral es 1.*

Paso 3: Integración y simplificación; *integramos sumando al exponente la unidad, dividiéndolo entre el exponente más 1, reduciendo la función hasta su mínima expresión.*

Problema resuelto

$$\int \sqrt{x^2 + 10}\,(2x)\,dx$$

Respuesta

$$\int \sqrt{x^2 + 10}\,(2x)\,dx$$

Adecuando el ejercicio.

$$\int (x^2 + 10)^{\frac{1}{2}}\,(2x)\,dx$$

Paso 1: Adecuación o solución del ejercicio; *aquí replanteamos, y se utiliza la integral por sustitución.*

Por fórmula

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$$

$$u = \begin{cases} f(x) \\ x^2 + 10 \end{cases}$$

$$du = \begin{cases} f'(x)\,dx \\ 2x\,dx \end{cases}$$

Al ser ***du = 2x*** *el integrando cumple con la fórmula de sustitución*

Al sustituir tenemos:

$$\int (u)^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$1\int (u)^{\frac{1}{2}}\,du$$

Paso 2: El retiro del coeficiente numérico; *el coeficiente numérico que se coloca antecediendo la integral es 1.*

$$1\frac{(u)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c$$

$$1\frac{(u)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$\frac{2}{3}(u)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\frac{2(x^2 + 10)^{\frac{3}{2}}}{3} + c$$

Paso 3: Integración y simplificación; *integramos sumando al exponente la unidad, dividiéndolo entre el exponente más 1, reduciendo la función hasta su mínima expresión.*

Problema resuelto

$$\int (x^4 + 3x)^{25}\,(4x^3 + 3)\,dx$$

Respuesta

Paso 1: Adecuación o solución del ejercicio; *aquí replanteamos y se utiliza la integral por sustitución.*

$$\int (x^4 + 3x)^{25}\,(4x^3 + 3)\,dx$$

Respuesta (*continuación*)

Por fórmula

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$$

$$u = \begin{cases} f(x) \\ x^4 + 3x \end{cases}$$

$$du = \begin{cases} f'(x)\,dx \\ 4x^3 + 3\,dx \end{cases} \longrightarrow \textit{Al ser } \mathbf{du = 4x^3 + 3} \textit{ el integrando cumple con la fórmula de sustitución}$$

Al sustituir tenemos:

$$\int (u)^{25}\,du$$

$$1\int (u)^{25}\,du$$

$$1\frac{(u)^{25+1}}{25+1} + c$$

$$1\frac{(u)^{26}}{26} + c$$

$$\frac{1}{26}(u)^{26} + c$$

$$\frac{1(x^4 + 3x)^{26}}{26} + c$$

Paso 2: El retiro del coeficiente numérico; *el coeficiente numérico que se coloca antecediendo la integral es 1.*

Paso 3: Integración y simplificación; *integramos sumando al exponente la unidad, dividiéndolo entre el exponente más 1, reduciendo la función hasta su mínima expresión.*

Problema resuelto

$$\int \left(\frac{x^2}{2} + 3\right)^2 x^2\,dx$$

Respuesta

Paso 1: Adecuación o solución del ejercicio; *aquí replanteamos y se utiliza la integral por sustitución.*

$$\int \left(\frac{x^2}{2} + 3\right)^2 x^2\,dx$$

Por fórmula

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$$

$$u = \begin{cases} f(x) \\ \frac{1}{2}x^2 + 3 \end{cases}$$

$$du = \begin{cases} f'(x)\,dx \\ x\,dx \end{cases} \longrightarrow \textit{Al tener } \mathbf{x^2} \textit{ no cumple, por ello debe replantearse}$$

En este problema encontramos una variante, *du* es *x* pero el integrando del ejercicio es x^2 por regla general *x* no puede ubicarse antes del símbolo de integral; antes de la integral solo se puede ubicar una constante.

Respuesta (*continuación*)

El ejercicio no se puede resolver por sustitución, pero se puede resolver de manera algebraica.

$$\int \left(\frac{1}{2}x^2 + 3\right)^2 x^2\, dx$$

$$\left(\frac{1}{2}x^2 + 3\right)\left(\frac{1}{2}x^2 + 3\right)$$

$$\left(\frac{1}{4}x^4 + 3x^2 + 9\right)$$

$$\int \left(\frac{1}{4}x^4 + 3x^2 + 9\right) dx$$

$$\int \frac{1}{4}x^4\, dx + \int 3x^2\, dx + \int 9\, dx$$

$$\frac{1}{4}\int x^4\, dx + 3\int x^2\, dx + 9\int dx$$

$$\frac{1}{4}\frac{x^5}{5} + 3\frac{x^3}{3} + 9x + c$$

$$\frac{1x^5}{20} + x^3 + 9x + c$$

Paso 2: El retiro del coeficiente numérico; *el coeficiente numérico que se coloca antecediendo la integral es 1.*

Paso 3: Integración y simplificación; *integramos sumando al exponente la unidad, dividiéndolo entre el exponente más 1, reduciendo la función hasta su mínima expresión.*

Problema resuelto

$$\int (x)(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

Respuesta

Paso 1: Adecuación o solución del ejercicio; *aquí replanteamos, y se utiliza la integral por sustitución.*

$$\int (x)(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

Por fórmula

$$\int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$$

$$u = \begin{cases} f(x) \\ x^2 + 1 \end{cases}$$

$$du = \begin{cases} f'(x)\, dx \\ 2x\, dx \end{cases}$$

Al tener **x** *no cumple, por ello debe replantearse*

Como *du* no corresponde, se hacen pequeñas adecuaciones algebraicas buscando que el término a obtenerse sea lo requerido 2*x*.

Rescribiendo el ejercicio

$$\int (x)(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{2}{2}\int (x)(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

El dos medios funciona como el 1 en la integral

$$= \frac{1}{2}\int 2(x)(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

Multiplicamos y obtenemos lo buscado, el 2*x*

Respuesta (*continuación*)

$$\frac{1}{2}\int (u)^{\frac{1}{2}}\, du$$

$$\frac{1}{2}\frac{(u)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+c$$

$$\frac{1}{2}\frac{(u)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c$$

$$\frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}+c$$

Paso 2: El retiro del coeficiente numérico; *el coeficiente numérico formado es un medio y ese valor sale de la integral.*

Paso 3: Integración y simplificación; *integramos sumando al exponente la unidad, dividiéndolo entre el exponente más 1, reduciendo la función hasta su mínima expresión.*

Problema resuelto

$$\int (3x^2-5)^2\,(x)\,dx$$

Respuesta

Paso 1: Adecuación o solución del ejercicio; *aquí replanteamos, y se utiliza la integral por sustitución.*

$$\int (3x^2-5)^2\,(x)\,dx$$

Por fórmula

$$\int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1}+c$$

$$u = \begin{cases} f(x) \\ 3x^2-5 \end{cases}$$

$$du = \begin{cases} f'(x)\,dx \\ 6x\,dx \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} \textit{Al tener} \\ \boldsymbol{x} \\ \textit{no cumple, por ello debe replantearse} \end{matrix}$$

Como *du* no corresponde, se hacen pequeñas adecuaciones algebraicas buscando que el término a obtenerse sea lo requerido 6*x*.

Rescribiendo el ejercicio

$$\int (3x^2-5)^2\,(x)\,dx = \frac{6}{6}\int (x)(3x^2-5)^2\, dx$$

El seis sextos funciona como el 1 en la integral

$$= \frac{1}{6}\int 6(x)(3x^2-5)^2\, dx$$

Multiplicamos y obtenemos lo buscado, el 6x

$$\frac{1}{6}\int (u)^2\, du$$

$$\frac{1}{6}\frac{(u)^{2+1}}{2+1}+c$$

$$\frac{1}{6}\frac{(u)^3}{3}+c$$

$$\frac{1}{18}(3x^2-5)^3+c$$

Paso 2: El retiro del coeficiente numérico; *el coeficiente numérico formado es un sexto y ese valor sale de la integral.*

Paso 3: Integración y simplificación; *integramos sumando al exponente la unidad, dividiéndolo entre el exponente más 1, reduciendo la función hasta su mínima expresión.*

Problema resuelto

$$\int (3x - 50)^2 \, dx$$

Respuesta

Paso 1: Adecuación o solución del ejercicio; *aquí replanteamos, y utilizamos la solución por sustitución.*

$$\int (3x - 50)^2 \, dx$$

Adecuando el ejercicio.

Por fórmula

$$\int u^n \, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$$

$$u = \begin{cases} f(x) \\ 3x - 50 \end{cases}$$

$$du = \begin{cases} f'(x)\,dx \\ 3\,dx \end{cases} \rightarrow du = 3\,dx \rightarrow \frac{du}{3} = dx$$

Al sustituir se obtiene:

$$\int (u)^2 \frac{du}{3}$$

Al ser una constante sale de la integral.

Paso 2: El retiro del coeficiente numérico; *el coeficiente numérico que se forma se coloca antecediendo la integral, aquí se saca un tercio.*

$$\frac{1}{3}\int (u)^2 \, du$$

$$\frac{1}{3}\frac{(u)^{2+1}}{2+1} + c$$

$$\frac{1}{3}\frac{(u)^3}{3} + c$$

$$\frac{1(u)^3}{9} + c$$

$$\frac{(3x - 50)^3}{9} + c$$

Paso 3: Integración y simplificación; *integramos sumando al exponente la unidad, dividiéndolo entre el exponente más 1, reduciendo la función hasta su mínima expresión.*

Problema resuelto

$$\int \sqrt{3x - 6} \, dx$$

Respuesta

Paso 1: Adecuación o solución del ejercicio; *aquí replanteamos, y usamos la integral por sustitución.*

$$\int \sqrt{3x - 6} \, dx$$

Adecuando el ejercicio.

$$\int (3x - 6)^{\frac{1}{2}} \, dx$$

Respuesta (*continuación*)

Por fórmula

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$$

$$u = \begin{cases} f(x) \\ 3x - 6 \end{cases}$$

$$du = \begin{cases} f'(x)\,dx \\ 3\,dx \end{cases} \rightarrow du = 3\,dx \rightarrow \frac{du}{3} = dx$$

Al sustituir tenemos:

$$\int (u)^{\frac{1}{2}}\,\frac{du}{3}$$

Al ser una constante sale de la integral.

$$\frac{1}{3}\int (u)^{\frac{1}{2}}\,du$$

Paso 2: El retiro del coeficiente numérico; *el coeficiente numérico que se forma se coloca antecediendo la integral, aquí se saca un tercio.*

$$\frac{1}{3}\frac{(u)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c$$

Paso 3: Integración y simplificación; *integramos sumando al exponente la unidad, dividiéndolo entre el exponente más 1, reduciendo la función hasta su mínima expresión.*

$$\frac{1}{3}\frac{(u)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$\frac{2}{9}(u)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\frac{2}{9}(3x-6)^{\frac{3}{2}} + c$$

Integrales de función primitiva logarítmica

Otro tipo de integral es aquélla donde el numerador es la derivada del denominador, donde podrá aplicarse la regla siguiente, obteniéndose el resultado del logaritmo natural.

A continuación, se presentan los pasos que explican cómo se da solución a ejercicios de integrales con representación logarítmica.

Paso 1: Verificación del numerador

La derivada del denominador deberá ser el término del numerador; en caso de no ser así, podrá realizarse una pequeña adecuación para obtener la función favorable para obtener su diferencial.

Paso 2: Resolución y simplificación

Al ser el numerador el diferencial del denominador se presentará la fórmula del logaritmo natural.

Problema resuelto

$$\int \frac{6x^2\,dx}{2x^3 + 10}$$

Respuesta

Paso 1: Verificación del numerador; aquí observaremos que el ejercicio cumple con la condición establecida para su solución.

Por fórmula

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln f(x) + c$$

$f'(x) = \{6x^2\,dx$ → Al tener **$6x^2$** sí cumple, esa es su derivada

$f(x) = \{2x^3 + 10$

Como al derivar $2x^3 + 10$ se obtiene $f'(x) = 6x^2$ el ejercicio corresponde a la regla del logaritmo natural.

Dando solución se obtiene:

$$\int \frac{6x^2\,dx}{2x^3 + 10} = \ln(2x^3 + 10) + c$$

Paso 2: Resolución y simplificación; integramos aplicando el procedimiento establecido.

Problema resuelto

$$\int \frac{x - 1}{4x^2 - 8x + 10}\,dx$$

Respuesta

Paso 1: Verificación del numerador; aquí observaremos que el ejercicio no cumple con la condición establecida por ello debe replantearse.

Por fórmula

$$\int \frac{f'(X)}{f(x)}\,dx = \ln f(x) + c$$

$f'(x) = \{8x - 8\,dx$ → Al tener **$x - 1$** no cumple, por ello debe replantearse

$f(x) = \{4x^2 - 8x + 10$

Como $f'(x)$ no corresponde, se hacen pequeñas adecuaciones algebraicas buscando que el término a obtenerse sea lo requerido $8x - 8$

Rescribiendo el ejercicio

$$\int \frac{x - 1}{4x^2 - 8x + 10}\,dx = \frac{8}{8}\int \frac{x - 1}{4x^2 - 8x + 10}\,dx$$

El ocho octavos funciona como el 1 en la integral

$$= \frac{1}{8}\int \frac{8(x - 1)}{4x^2 - 8x + 10}\,dx$$

Multiplicamos y obtenemos lo buscado, el $8x - 8$

$$\frac{1}{8}\ln(4x^2 - 8x + 10) + c$$

Paso 2: Resolución y simplificación; integramos aplicando el procedimiento establecido.

5.5 Integral definida

Una integral definida se encuentra representada por dos números reales presentes en un intervalo, desde *a* hasta *b* los valores límites de la integral, los puntos extremos de la misma.

La integral definida se denota como:

$$\int_a^b f'(x)\,dx \qquad \int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - [f(a)]$$

Al obtener el valor del intervalo la constante de integración desaparece ya que la integral presentará un valor definido al restarle a la integral evaluada en el *límite mayor b* la integral evaluada en *límite menor a*.

Alerta

Una integral definida presenta un intervalo.

Los pasos que explican cómo obtener una integral definida son los siguientes:

Paso 1: Resolución de la integral

Se realizará lo aprendido en el tema anterior:

- Replanteamos, despejamos o separamos términos para integrarlos.
- En el caso de integrales de potencia *x* integramos, sacando el coeficiente numérico de la integral, sumándole al exponente la unidad dividiéndolo entre el exponente más 1.

Paso 2: Identificar los valores extremos de integración

Los valores *a* y *b* que se presentan como límites de integración; los extremos de la integral, el inicial o límite inferior de integración y el otro el límite superior de integración.

$$\int_{a \to \text{Valor menor del intervalo}}^{b \to \text{Valor mayor del intervalo}}$$

Paso 3: La solución de la integral definida

Se sustituyen los límites de la integración, comenzando con el límite superior de integración y después con el límite inferior de integración y de la diferencia de sus operaciones se obtendrá el resultado de la integral definida.

Problema resuelto

$$\int_4^8 (12x^2 - 35x - 7)\,dx$$

Respuesta

Resolución de la integral

$$\int 12x^2\,dx - \int 35x\,dx - \int 7\,dx$$

Retiro del coeficiente

$$12\int x^2\,dx - 35\int x\,dx - 7\int dx$$

Integrando y Simplificando

$$12\frac{x^{2+1}}{2+1} - 35\frac{x^{1+1}}{1+1} - 7x$$

$$12\frac{x^3}{3} - 35\frac{x^2}{2} - 7x$$

Paso 1: Resolución de la integral; en este caso separamos los términos, sacamos el coeficiente numérico de la integral e integramos.

Respuesta (*continuación*)

La Integral Definida

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - [f(a)]$$

$$\left[12\frac{x^3}{3} - 35\frac{x^2}{2} - 7x\right]_4^8$$

Paso 2: Identificar los valores extremos de integración; los valores *a* y *b* son los extremos de la integral.

La Sustitución de los límites

$$\left[12\frac{(8)^3}{3} - 35\frac{(8)^2}{2} - 7(8)\right] - \left[12\frac{(4)^3}{3} - 35\frac{(4)^2}{2} - 7(4)\right]$$

$$[2\,048 - 1\,120 - 56] - [256 - 280 - 28] = 924$$

Paso 3: La solución de la Integral definida; al sustituir los valores extremos de la integral, los valores *b* y *a* se obtienen de la solución del ejercicio.

La integral definida de en el intervalo de $a = 4$ y $b = 8$ es 924

Problema resuelto

$$\int_2^5 (3x^3 + 6x^2 + 7x)\,dx$$

Respuesta

Resolución de la integral

$$\int 3x^3\,dx + \int 6x^2\,dx + \int 7x\,dx$$

Paso 1: Resolución de la integral; *en este caso separamos los términos, sacamos el coeficiente numérico de la integral e integramos.*

Retiro del coeficiente

$$3\int x^3\,dx + 6\int x^2\,dx + 7\int x\,dx$$

Integrando y Simplificando

$$3\frac{x^{3+1}}{3+1} + 6\frac{x^{2+1}}{2+1} + 7\frac{x^{1+1}}{1+1}$$

$$3\frac{x^4}{4} + 6\frac{x^3}{3} + 7\frac{x^2}{2}$$

La Integral Definida

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - [f(a)]$$

$$\left[3\frac{x^4}{4} + 6\frac{x^3}{3} + 7\frac{x^2}{2}\right]_2^5$$

Paso 2: Identificar los valores extremos de integración; *los valores a y b son los extremos de la integral.*

La Sustitución de los límites

$$\left[3\frac{(5)^4}{4} + 6\frac{(5)^3}{3} + 7\frac{(5)^2}{2}\right] - \left[3\frac{(2)^4}{4} + 6\frac{(2)^3}{3} + 7\frac{(2)^2}{2}\right]$$

$$[468.75 + 250 + 87.5] - [12 + 16 + 14] = 764.25$$

Paso 3: La solución de la Integral definida; *al sustituir los valores extremos de la integral, los valores b y a se obtienen de la solución del ejercicio.*

La integral definida en el intervalo de $a = 2$ y $b = 5$ es 764.25

Problema resuelto

$$\int_1^2 (x^2\sqrt{x})\,dx$$

Respuesta

Resolución de la integral

$$\int x^2 x^{\frac{1}{2}}\,dx$$

Paso 1: Resolución de la integral; *en este caso separamos los términos, sacamos el coeficiente numérico de la integral e integramos.*

$$\int x^{\frac{4}{2}} x^{\frac{1}{2}}\,dx$$

Retiro del coeficiente

$$1\int x^{\frac{5}{2}}\,dx$$

Integrando y Simplificando

$$1\frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1}$$

$$1\frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}$$

$$\frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7}$$

La Integral Definida

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - [f(a)]$$

$$\left(\frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7}\right)_1^2$$

Paso 2: Identificar los valores extremos de integración; *los valores a y b son los extremos de la integral.*

La Sustitución de los límites

$$\left[\frac{2(2)^{\frac{7}{2}}}{7}\right] - \left[\frac{2(1)^{\frac{7}{2}}}{7}\right]$$

Paso 3: La solución de la Integral definida; *al sustituir los valores extremos de la integral, los valores b y a se obtienen de la solución del ejercicio.*

$[3.232488143] - [0.285714285] = 2.946771$

La integral definida en el intervalo de $a = 1$ y $b = 2$ es 2.946771

Aplicaciones económico administrativas

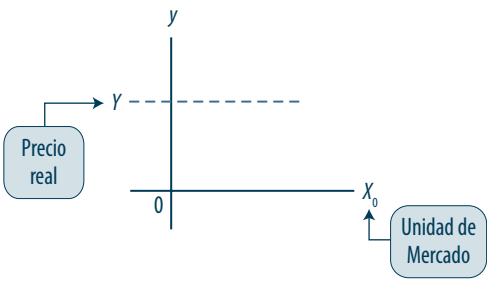
Excedentes

En un enfoque aplicado el término excedente se utiliza para denotar un valor virtual, la mayoría de las veces proyectado al futuro, por lo que en el momento no es real es supuesto.

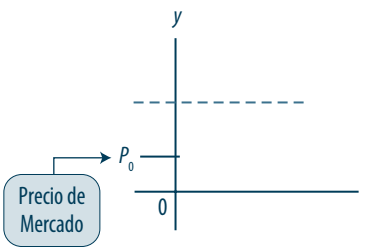
5.6 Excedente de consumidor

Cuando los consumidores están dispuestos a adquirir algo y piensan que puede costar tanto; si el precio de mercado P_0 puede demandar unidades de mercado X_0 y este es menor que el precio presupuestado, aquellos comerciantes que pensaban pagar un precio mayor obtienen el beneficio del consumidor; obsérvese lo siguiente:

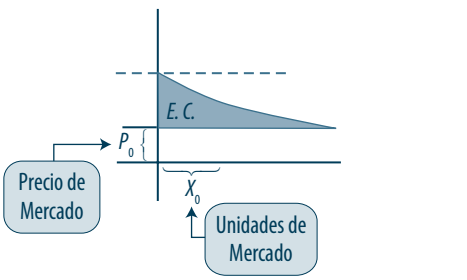
A inicio de año un consumidor planea comprar un carro supone que para fin de año tendrá el dinero suficiente para adquirirlo ya que en este momento el automóvil presenta un precio real (véase la gráfica).



A fin de año encuentra lo que buscaba pero a un precio menor de lo que pensaba pagar, por lo que el precio de mercado se ubica por debajo del precio que él pensaba pagar ubicándose en la gráfica en el punto "P_0".



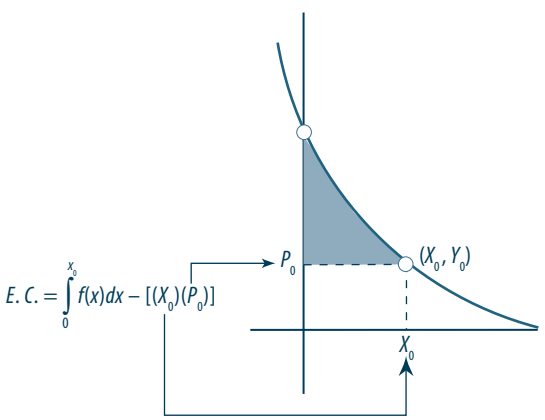
La parte que el comprador no gasta es lo que se conoce con el nombre de excedente del consumidor (*E.C.*).



El excedente del consumidor

$$E.C. = \int_0^{x_0} f(x)\,dx - [(X_0)(P_0)]$$

Según los supuestos económicos la ganancia que el consumidor obtiene está representada por el área bajo la línea de demanda.



Es importante hacer notar que en la fórmula se utiliza $\boldsymbol{P_0}$ como precio de mercado, pero en otras publicaciones puede encontrarse $\boldsymbol{Y_0}$ para fines prácticos es lo mismo.

Los pasos que explican cómo obtener un excedente del consumidor son los siguientes:

Alerta

En el excedente del consumidor la función empleada es de Demanda.

Paso 1: Obtención de la variable

Se pueden presentar tres situaciones en el planteamiento de demanda:

a) Que el dato conocido sea X_0 y el dato desconocido sea Y_0
b) Que el dato conocido sea Y_0 y el dato desconocido sea X_0
c) Que tanto Y_0 como X_0 se desconozcan.

Paso 2: La sustitución de los valores en la fórmula

En la fórmula sustituiremos los valores obtenidos del paso anterior colocando X_0 y Y_0 donde la fórmula lo indique.

$$E.C. = \int_0^{x_0} f(x)\,dx - [(X_0)(P_0)]$$

Paso 3: La resolución de la integral

Se aplicará lo aprendido:

- Se replanteará, despejará o separará dependiendo del planteamiento del ejercicio.

Paso 4: Representación y solución del intervalo

Un excedente siempre se representa en un intervalo de cero a X_0 su representación se visualiza así:

$$\int_0^{X_0} [X_0 - 0]\,dx$$

y de esta operación se obtiene su resultado.

Problema resuelto

Resolver el siguiente ejercicio $E.C. = \int_0^3 (-4x^2 - 6x + 60)\,dx - [(3)(P_0)]$

Aquí se conoce el valor de X_0

Respuesta

$y = -4x^2 - 6x + 60$
$y = -4(3)^2 - 6(3) + 60$
$y = 6$

$$E.C. = \int_0^{x_0} f(x)\,dx - [(X_0)(P_0)]$$

$$E.C. = \int_0^3 (-4x^2 - 6x + 60)\,dx - [(3)(6)]$$

Paso 1: Obtención de la variable; *aquí se busca el valor de P_0 conocido también como Y_0 el precio de mercado*

Paso 2: La sustitución de los valores en la fórmula;
$X_0 = 3 \qquad P_0 = 6$

Paso 3: Obtención de la integración

Separamos

$$\int -4x^2\,dx - \int 6x\,dx + \int 60\,dx$$

Retiramos el coeficiente

$$-4\int x^2\,dx - 6\int x\,dx + 60\int dx$$

Integración de la expresión

$$-4\frac{x^{2+1}}{2+1} - 6\frac{x^{1+1}}{1+1} + 60x$$

Respuesta (*continuación*)

Paso 4: Representación y solución del intervalo;

Solución del intervalo

$$E.C. = \left[-4\frac{(3)^{2+1}}{2+1} - 6\frac{(3)^{1+1}}{1+1} + 60(3)\right] - \left[-4\frac{(0)^{2+1}}{2+1} - 6\frac{(0)^{1+1}}{1+1} + 60(0)\right] - [(3)(6)]$$

$$E.C. = [-36 \quad -27 \quad +180 \quad] - [\quad \text{Todo da CERO} \quad] - [18]$$

$$E.C. = 99$$

Problema resuelto

Si $Y_0 = 4$ y la ecuación de demanda es $y = -x^2 + 5x + 10$ obtener el *E.C.*
Aquí se conoce el valor de Y_0

Respuesta

$$y = -x^2 + 5x + 10$$

$$4 = -x^2 + 5x + 10$$

$$0 = -x^2 + 5x + 10 - 4$$

$$0 = -x^2 + 5x + 6 \qquad \begin{matrix} a = -1 \\ b = 5 \\ c = 6 \end{matrix}$$

$$\frac{-(5) \pm \sqrt{(5)^2 - 4(-1)(6)}}{2(-1)} \rightarrow \begin{matrix} x_1 = -1 \\ x_2 = 6 \end{matrix}$$

Paso 1: Obtención de la variable; *aquí se busca el valor de X_0. Como la expresión presenta un cuadrado se puede utilizar la fórmula general*

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Los resultados obtenidos son -1 y 6

Como no puede haber unidades negativas se toma el resultado positivo.

$$E.C. = \int_0^{x_0} f(x)\,dx - [(X_0)(P_0)]$$

Paso 2: La sustitución de los valores en la fórmula;

$$X_0 = 6 \qquad P_0 = 4$$

$$E.C. = \int_0^{6} (-x^2 + 5x + 10)\,dx$$

Paso 3: Obtención de la integración

$$-\int x^2\,dx + \int 5x\,dx + \int 10\,dx$$

Separamos

$$-1\int x^2\,dx + 5\int x\,dx + 10\int dx$$

Retiramos el coeficiente

$$-1\frac{x^{2+1}}{2+1} + 5\frac{x^{1+1}}{1+1} + 10x$$

Integración de la expresión

Paso 4: Representación y solución del intervalo;

Sustitución del intervalo

$$E.C. = \left[-1\frac{(6)^{2+1}}{2+1} + 5\frac{(6)^{1+1}}{1+1} + 10(6)\right] - \left[-1\frac{(0)^{2+1}}{2+1} + 5\frac{(0)^{1+1}}{1+1} + 10(0)\right] - [(6)(4)]$$

$$E.C. = [-72 \quad +90 \quad +60 \quad] - [\quad \text{Todo da CERO} \quad] - [24]$$

$$E.C. = 54$$

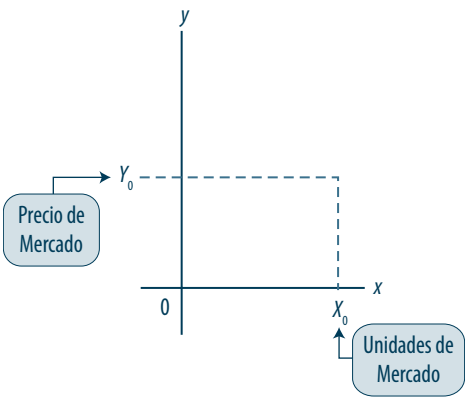
5.7 Excedente del productor

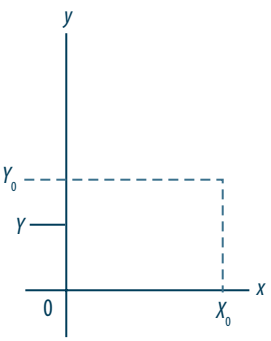
Alerta

En el excedente del productor la función empleada es de Oferta.

Cuando los productores están dispuestos a ofrecer algo por debajo del precio de mercado P_0 que puede demandar unidades de mercado X_0, aquellos vendedores que ofrecen por debajo del mercado se ubican en el excedente del productor; obsérvese lo siguiente:

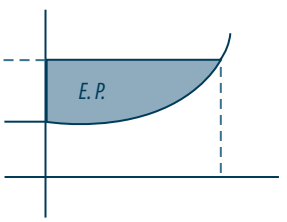
A inicio de año un fabricante de uniformes escolares supone que para el mes de julio el precio de mercado sufrirá 30% de incremento sobre el actual precio; ubicándose este en la gráfica sobre la línea punteada relacionando a $\mathbf{Y_0}$ (Precio de Mercado) y $\mathbf{X_0}$ (unidades de Mercado) en un punto coordenado de venta en el mercado.





Solo que al terminar la temporada se da cuenta de que sus ingresos no llegaron a la meta trazada y ve con tristeza que su nuevo punto se ubica por debajo de la línea proyectada en un punto real "Y"

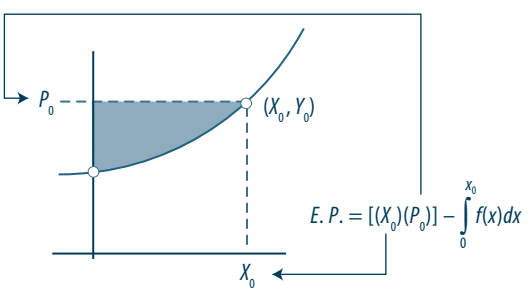
La parte no alcanzada por el fabricante es lo que se conoce con el nombre de excedente del productor (*E.P.*)



El excedente del productor

$$E.P. = [(X_0)(P_0)] - \int_0^{X_0} f(x)\,dx$$

Según los supuestos económicos la ganancia total del productor está representada por el área sobre la línea de oferta.



Los pasos que explican cómo obtener un excedente del productor son los siguientes:

Paso 1: Obtención de la variable

Se pueden presentar tres situaciones en el planteamiento de oferta:

a) Que el dato conocido sea X_0 y el dato desconocido sea Y_0
b) Que el dato conocido sea Y_0 y el dato desconocido sea X_0
c) Que tanto Y_0 como X_0 se desconozcan.

Paso 2: La sustitución de los valores en la fórmula

En la fórmula sustituiremos los valores obtenidos del paso anterior colocando X_0 y Y_0 donde la fórmula lo indique.

$$E.P. = [(X_0)(P_0)] - \int_0^{x_0} f(x)\,dx$$

Paso 3: La resolución de la integral

Se aplicará lo aprendido:

- Se replanteará, despejará o separará dependiendo del planteamiento del ejercicio.

Paso 4: Representación del intervalo y la solución del planteamiento

Un excedente siempre se representa en un intervalo de cero a X_0 su representación se visualiza así:

$$\int_0^{X_0} [X_0 - 0]\,dx$$

y de esta operación se obtiene su resultado.

Problema resuelto

Resolver el ejercicio del $E.P. = [(4)(P_0)] - \int_0^4 (2x^3 - 3x^2 + 4x + 10)\,dx$

Aquí se conoce el valor de X_0

Respuesta

$y = 2x^3 - 3x^2 + 4x + 10$
$y = 2(4)^3 - 3(4)^2 + 4(4) + 10$
$y = 106$

Paso 1: Obtención de la variable; *aquí se busca el valor de P_0 conocido también como Y_0 el precio de mercado.*

$$E.P. = [(X_0)(P_0)] - \int_0^{x_0} f(x)\,dx$$

$$E.P. = [(4)(106)] - \int_0^4 (2x^3 - 3x^2 + 4x + 10)\,dx$$

Paso 2: La sustitución de los valores en la fórmula;

$X_0 = 4 \qquad P_0 = 106$

Paso 3: Obtención de la integración

$$\int 2x^3\,dx - \int 3x^2\,dx + \int 4x\,dx + \int 10\,dx$$

Separamos

$$2\int x^3\,dx - 3\int x^2\,dx + 4\int x\,dx + 10\int dx$$

Retiramos el coeficiente

$$2\frac{x^{3+1}}{3+1} - 3\frac{x^{2+1}}{2+1} + 4\frac{x^{1+1}}{1+1} + 10x$$

Integración de la expresión

Paso 4: Representación y solución del intervalo;

Sustitución del intervalo

$$E.P. = [(4)(106)] - \left[2\frac{(4)^{3+1}}{3+1} - 3\frac{(4)^{2+1}}{2+1} + 4\frac{(4)^{1+1}}{1+1} + 10(4)\right] - \left[2\frac{(0)^{3+1}}{3+1} - 3\frac{(0)^{2+1}}{2+1} + 4\frac{(0)^{1+1}}{1+1} + 10(0)\right]$$

$E.P. = [424] \quad -[\ 128 \ - \ 64 \ + \ 32 \ + 40\ ] - [$ Todo da CERO $]$
$E.P. = 288$

Problema resuelto

Si $Y_0 = 90$ y la ecuación de oferta es $y = 8x^2 + 18x - 36$ obtener el *E.P.*
Aquí se conoce el valor de Y_0

Respuesta

$$y = 8x^2 + 18x - 36$$
$$90 = 8x^2 + 18x - 36$$
$$0 = 8x^2 + 18x - 36 - 90$$

$$0 = 8x^2 + 18x - 126 \qquad \begin{aligned} a &= 8 \\ b &= 18 \\ c &= -126 \end{aligned}$$

$$\frac{-(18) \pm \sqrt{(18)^2 - 4(8)(-126)}}{2(8)}$$

$$\frac{-(18) \pm \sqrt{324 + 4032}}{16}$$

$$\frac{-18 \pm \sqrt{4356}}{16}$$

$$\frac{-18 \pm 66}{16} = \begin{cases} \dfrac{-18 + 66}{16} = \dfrac{+48}{16} = +3 \\ \dfrac{-18 - 66}{16} = \dfrac{-84}{16} = -5.25 \end{cases}$$

Es el valor de x_0

Paso 1: Obtención de la variable; aquí se busca el valor de X_0. Como la expresión presenta un cuadrado se puede utilizar la fórmula general

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Los resultados obtenidos son -5.25 y 3

Como no puede haber unidades negativas se toma el resultado positivo.

$$E.P. = [(X_0)(P_0)] - \int_0^{x_0} f(x)\,dx$$

$$\int_0^3 (8x^2 + 18x - 36)\,dx$$

$$+\int 8x^2\,dx + \int 18x\,dx - \int 36\,dx$$

$$+8\int x^2\,dx + 18\int x\,dx - 36\int dx$$

$$+8\frac{x^{2+1}}{2+1} + 18\frac{x^{1+1}}{1+1} - 36x$$

Paso 2: La sustitución de los valores en la fórmula;

$X_0 = 3 \qquad P_0 = 90$

Paso 3: Obtención de la integración

Separamos

Retiramos el coeficiente

Integración de la expresión

Paso 4: Representación y solución del intervalo;

Sustitución del intervalo

$$E.P. = [(3)(90)] - \left[8\frac{(3)^{2+1}}{2+1} + 18\frac{(3)^{1+1}}{1+1} - 36(3)\right] - \left[8\frac{(0)^{2+1}}{2+1} + 18\frac{(0)^{1+1}}{1+1} - 36(0)\right]$$

$$E.P. = [270] - [\ 72 + 81 - 108\ ] - [\ \text{Todo da CERO}\ ]$$

$$E.P. = 225$$

Problema resuelto

Resuelve el ejercicio del $E.P. = [(6)(P_0)] - \int_0^6 (x^4 + 0.5x^3 + 2.3x^2 + 4.2x + 5)\,dx$

Aquí se conoce el valor de X_0

Respuesta

$y = x^4 + 0.5x^3 + 2.3x^2 + 4.2x + 5$

$y = (6)^4 + 0.5(6)^3 + 2.3(6)^2 + 4.2(6) + 5$

$y = 1\,517$

Paso 1: Obtención de la variable; *aquí se busca el valor de P_0 conocido también como y_0 el precio de mercado.*

$$E.P. = [(X_0)(P_0)] - \int_0^{x_0} f(x)\,dx$$

Paso 2: La sustitución de los valores en la fórmula;

$X_0 = 6 \qquad P_0 = 1\,517$

$$E.P. = [(6)(1517)] - \int_0^6 (x^4 + 0.5x^3 + 2.3x^2 + 4.2x + 5)\,dx$$

Paso 3: Obtención de la integración

$$\int x^4\,dx + \int 0.5x^3\,dx \int + 2.3x^2\,dx + \int 4.2x\,dx + \int 5\,dx$$

Separamos

$$1\int x^4\,dx + 0.5\int x^3\,dx + 2.3\int x^2\,dx + 4.2\int x\,dx + 5\int dx$$

Retiramos el coeficiente

$$1\frac{x^{4+1}}{4+1} + 0.5\frac{x^{3+1}}{3+1} + 2.3\frac{x^{2+1}}{2+1} + 4.2\frac{x^{1+1}}{1+1} + 5x$$

Integramos

Paso 4: Representación y solución del intervalo.

Sustitución del intervalo

$$E.P. = [(6)(1517)] - \left[1\frac{(6)^{4+1}}{4+1} + 0.5\frac{(6)^{3+1}}{3+1} + 2.3\frac{(6)^{2+1}}{2+1} + 4.2\frac{(6)^{1+1}}{1+1} + 5(6)\right] -$$

$$\left[1\frac{(0)^{4+1}}{4+1} + 0.5\frac{(0)^{3+1}}{3+1} + 2.3\frac{(0)^{2+1}}{2+1} + 4.2\frac{(0)^{1+1}}{1+1} + 5(0)\right]$$

$E.P. = [9\,102] - [1\,555.20 + 162 + 165.60 + 75.6 + 30] -$

[Todo da CERO]

$E.P. = 7\,113.60$

5.8 Ambas variables desconocidas

La cantidad de demanda y el precio de equilibrio en un mercado están determinados por las funciones $y = x + 4$, $y = -2x^2 + 6x + 16$ de oferta y demanda correspondientemente obtener:

a) El valor de X_0

b) El valor de Y_0

c) El excedente del consumidor.

d) El excedente del fabricante.

Como no conocemos ni a Y_0 ni X_0 emplearemos el método de igualación para conocer el valor de cada una, recuerda que en el equilibrio la oferta se iguala con la demanda.

$$Demanda = Oferta$$

$$-2x^2 + 6x + 16 = x + 4$$

$$-2x^2 + 6x + 16 - x - 4 = 0$$

$$-2x^2 + 5x + 12 = 0 \qquad \begin{array}{l} a = -2 \\ b = +5 \\ c = 12 \end{array}$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\frac{-(5) \pm \sqrt{(5)^2 - 4[(-2)(12)]}}{2(-2)}$$

$$\frac{-(5) \pm \sqrt{25 + 96}}{-4}$$

$$\frac{-(5) \pm \sqrt{121}}{-4}$$

$$\frac{-5 \pm 11}{-4} = \begin{cases} \dfrac{-5 + 11}{-4} = \dfrac{+6}{-4} = -1.5 \\ \dfrac{-5 - 11}{-4} = \dfrac{-16}{-4} = +4 \end{cases}$$

Paso 1: Obtención de la variable; *como aquí se desconocen las dos, calcularemos ambas, para obtenerse igualaremos ambas funciones y utilizaremos la fórmula general por el cuadrado que presenta, obteniendo el primer resultado.*

Como no puede haber unidades negativas se toma el resultado positivo; ese será el valor de X_0

Para obtener P_0 se sustituye el valor de X_0 en cualquiera de las ecuaciones originales

$$y = x + 4$$

$$y = 4 + 4$$

$$y = 8 \qquad \text{El valor de } P_0$$

Obtención del excedente del consumidor $y = -2x^2 + 6x + 16$

$$E.C. = \int_0^{x_0} f(x)\,dx - [(X_0)(P_0)]$$

*Como pide excedente de **consumidor** la función a ser integrada es la de demanda.*

$$E.C. = \int_0^4 (-2x^2 + 6x + 16)\,dx - [(4)(8)]$$

$$-\int 2x^2\,dx + \int 6x\,dx + \int 16\,dx$$

$$-2\int x^2\,dx + 6\int x\,dx + 16\int dx$$

$$-2\frac{x^{2+1}}{2+1} + 6\frac{x^{1+1}}{1+1} + 16x$$

Paso 1: La sustitución de los valores en la fórmula;

$X_0 = 4 \qquad Y_0 = 8$

Paso 2: Obtención de la integración

Paso 3: Representación del intervalo y la solución del planteamiento.

$$E.C. = \left[-2\frac{(4)^3}{3} + 6\frac{(4)^2}{2} + 16(4)\right] - \left[-2\frac{(0)^3}{3} + 6\frac{(0)^2}{2} + 16(0)\right] - [(4)(8)]$$

$E.C. = 37.333$

Obtención del excedente del productor $y = x + 4$

$$E.P. = [(X_0)(P_0)] - \int_0^{x_0} f(x)\,dx$$

*Como pide excedente de **productor** la función a ser integrada es la de oferta.*

$$E.P. = [(4)(8)] - \int_0^4 (x + 4)\,dx$$

$$+\int 1x\,dx + \int 4\,dx$$

$$+1\int x\,dx + 4\int dx$$

$$+1\frac{x^{1+1}}{1+1} + 4x$$

$$E.P. = [(4)(8)] - \left[1\frac{(4)^2}{2} + 4(4)\right] - \left[1\frac{(0)^2}{2} + 4(0)\right]$$

Paso 1: La sustitución de los valores en la fórmula;

$X_0 = 4 \qquad Y_0 = 8$

Paso 2: Obtención de la integración

Separamos, Retiramos e Integramos

Paso 3: Representación del intervalo y la solución del planteamiento.

$E.P. = 8$

5.9 La integral un proceso totalizador

Como se explicó en la unidad anterior un punto de maximización se obtenía mediante el empleo de un marginal, de igual manera pero en proceso inverso de un marginal podrá obtenerse un total al integrarse.

Alerta

De un Marginal al integrarse se obtiene un Total.

Los conceptos a totalizarse

Ingreso marginal **IM** o **I´**	Mismo que al integrarse se obtendrá total, ya que al integrarse se le quitará lo marginal.
Costo marginal **CM** o **C´**	Al integrarse Costo total.
Utilidad marginal **UM** o **U´**	Al integrarse Utilidad total.

Adicionalmente a estos conceptos, también se encuentran los promedios marginales, uno de ellos, y quizá el más utilizado para ser integrado es Costo promedio marginal.

ALERTA: Recuerda que para totalizar una función esta debe ser marginal; por lo que si se te presenta un problema que pida obtener un concepto en su forma total, la redacción del problema deberá proporcionar un marginal para que al integrarlo pase de marginal a total.

Para dar solución a un problema se deben ubicar los datos que se indican en redacción, así como lo solicitado como resultado, pudiéndose presentar alguno de los siguientes supuestos:

Supuestos de solución

Si la redacción indica una función marginal y pide una función total, deberá integrarse.

El problema indica	CM	CPM	CPM	CM
	↓	↓	↓	↓
Lo que se debe hacer	$\int$	$\int$	En este supuesto se integra para quitarle lo marginal y después se multiplica para hacerla total	En este supuesto primero se integra para quitarle lo marginal y después se divide para hacerla promedio
	↓	↓	↓	↓
Se pide de resultado	C	CP	C	CP

Lo mismo se realiza con las otras funciones (ingreso, utilidad, gasto) etcétera.

Los totalizadores

La función es de **Ingreso Marginal** y pide determinar **Ingreso**
La función es de **Costo Marginal** y pide obtener **Costo**
La función es de **Utilidad Marginal** y pide **Utilidad**
La función es **Ingreso promedio Marginal** y pide **Ingreso promedio**
La función es **Costo promedio Marginal** y pide **Costo promedio**
La función es **Utilidad promedio Marginal** y pide **Utilidad promedio**

En todos estos casos al planteamiento lo debemos integrar, para hacerlo total; es decir quitarle lo marginal.

Variantes de aplicación

La función es **Ingreso Promedio Marginal** y pide **Ingreso**
La función es **Costo Promedio Marginal** y pide **Costo**
La función es **Utilidad Promedio Marginal** y pide **Utilidad**

La función proporcionada en el ejercicio es promedio marginal, por lo que aquí primero la integraremos para quitarle lo marginal y después multiplicaremos para hacerla total.

La función es **Ingreso Marginal** y pide **Ingreso Promedio**
La función es **Costo Marginal** y pide **Costo Promedio**
La función es **Utilidad Marginal** y pide **Utilidad Promedio**

La función proporcionada en el ejercicio es marginal, por lo que aquí primero la integraremos para quitarle lo marginal y después se debe dividir para hacerla promedio.

Aplicación de los supuestos

Para obtener una función totalizada partiendo de un marginal se recomiendan los siguientes pasos:

Paso 1: Identificar la información que se proporciona

Ubicar en la redacción el marginal que se integrará haciéndolo total.

Paso 2: Reconocer lo que solicita el problema

Lo solicitado en el planteamiento del problema será la función a obtenerse, por ello es importante saber si se utilizará la función original o una adecuación de la misma, ya que puede solicitarse una función total o promediada y esto solo dependerá de la redacción que el ejercicio presente.

Problema resuelto

El Ingreso marginal de un producto es $IM = 40x^4 + 20x^3 + 6x^2 - 2x + 1$ obtener la función de Ingreso.

Respuesta

$IM = 40x^4 + 20x^3 + 6x^2 - 2x + 1$

La función no se adecúa

solo se integra.

Paso 1: Identificar la información que se proporciona; *aquí es una función de ingreso marginal.*

$$\int (40x^4 + 20x^3 + 6x^2 - 2x + 1)\,dx$$

$$\int 40x^4\,dx + \int 20x^3\,dx + \int 6x^2\,dx - \int 2x\,dx + \int 1\,dx$$

Paso 2: Reconocer lo que solicita el problema; se solicita *ingreso por ello la función se integra.*

Respuesta (*continuación*)

$$40\int x^4\,dx + 20\int x^3\,dx + 6\int x^2\,dx - 2\int x\,dx + 1\int dx$$

$$40\frac{x^{4+1}}{4+1} + 20\frac{x^{3+1}}{3+1} + 6\frac{x^{2+1}}{2+1} - 2\frac{x^{1+1}}{1+1} + 1x + c$$

$$40\frac{x^5}{5} + 20\frac{x^4}{4} + 6\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + x + c$$

$$I = 8x^5 + 5x^4 + 2x^3 - 1x^2 + x + c$$

Problema resuelto

El Ingreso promedio marginal es $IPM = 32x^3 + 15x^2 + 4x - 1$ obtener la función de Ingreso.

Respuesta

$$IPM = 32x^3 + 15x^2 + 4x - 1$$

La función debe adecuarse

primero debe integrarse

Paso 1: Identificar la información que se proporciona; *aquí es una función de ingreso promedio marginal.*

$$\int (32x^3 + 15x^2 + 4x - 1)\,dx$$

$$\int 32x^3\,dx + \int 15x^2\,dx + \int 4x\,dx - \int 1\,dx$$

$$32\int x^3\,dx + 15\int x^2\,dx + 4\int x\,dx - 1\int dx$$

Paso 2: Reconocer lo que solicita el problema; se solicita *ingreso, por ello la función solo se integra para quitarle lo marginal y se multiplica para quitarle el promedio.*

$$32\frac{x^{3+1}}{3+1} + 15\frac{x^{2+1}}{2+1} + 4\frac{x^{1+1}}{1+1} - 1x + c$$

$$32\frac{x^4}{4} + 15\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} - x + c$$

$$IP = 8x^4 + 5x^3 + 2x^2 - x + c$$

después debe multiplicarse.

$$I = (8x^4 + 5x^3 + 2x^2 - x + c)x$$

$$I = 8x^5 + 5x^4 + 2x^3 - x^2 + xc$$

Problema resuelto

El Ingreso marginal de un producto es $IM = 40x^4 + 20x^3 + 6x^2 - 2x + 1$ obtener la función de Ingreso promedio.

Respuesta

$IM = 40x^4 + 20x^3 + 6x^2 - 2x + 1$

La función debe adecuarse

primero debe integrarse

Paso 1: Identificar la información que se proporciona; *aquí es una función de ingreso marginal.*

$$\int (40x^4 + 20x^3 + 6x^2 - 2x + 1)\,dx$$

$$\int 40x^4\,dx + \int 20x^3\,dx + \int 6x^2\,dx - \int 2x\,dx + \int 1\,dx$$

$$40\int x^4\,dx + 20\int x^3\,dx + 6\int x^2\,dx - 2\int x\,dx + 1\int dx$$

$$40\frac{x^{4+1}}{4+1} + 20\frac{x^{3+1}}{3+1} + 6\frac{x^{2+1}}{2+1} - 2\frac{x^{1+1}}{1+1} + 1x + c$$

$$40\frac{x^5}{5} + 20\frac{x^4}{4} + 6\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + x + c$$

Paso 2: Reconocer lo que solicita el problema; se solicita *ingreso promedio, por ello la función primero se integra para quitarle lo marginal y al solicitarse promediada, esta debe dividirse para obtenerla promediada.*

$I = 8x^5 + 5x^4 + 2x^3 - 1x^2 + x + c$

después debe dividirse.

$$IP = \frac{8x^5}{x} + \frac{5x^4}{x} + \frac{2x^3}{x} - \frac{1x^2}{x} + \frac{x}{x} + \frac{c}{x}$$

$$IP = 8x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 1x + 1 + \frac{c}{x}$$

Problema resuelto

La siguiente función representa el Costo Marginal de fabricar un producto $CM = 25x - 90 + 78x^2$, donde x representa el número de unidades fabricadas; determine el costo total de operación de producir 10 unidades, si su costo fijo es de $5 000.00

Respuesta

$CM = 25x - 90 + 78x^2$

La función no se adecúa solo se integra pero por presentación

primero la ordenamos

Paso 1: Identificar la información que se proporciona; *aquí es una función de costo marginal.*

$CM = 78x^2 + 25x - 90$

Respuesta (*continuación*)

$$\int (78x^2 + 25x - 90)\,dx$$

$$\int 78x^2\,dx + \int 25x\,dx - \int 90\,dx$$

$$78\int x^2\,dx + 25\int x\,dx - 90\int dx$$

$$78\frac{x^{2+1}}{2+1} + 25\frac{x^{1+1}}{1+1} - 90x + c$$

$$78\frac{x^3}{3} + 25\frac{x^2}{2} - 90x + c$$

$CT = 26x^3 + 12.5x^2 - 90x + c$

$CT = 26(10)^3 + 12.5(10)^2 - 90(10) + 5\,000$

$CT = 26\,000 + 1\,250 - 900 + 5\,000$

$CT = 31\,350$ Importe del costo total

Paso 2: Reconocer lo que solicita el problema; *se solicita Costo Total, por ello se integra primero para quitarle lo marginal y transformarla en una función total.*

Recuerda que al Integrar una función marginal esta se transforma en una función total y para obtener el C.T. en la función se sustituyen tanto las unidades como el valor de la constante.

El planteamiento indica que el costo fijo es de $5 000.00 y el costo fijo lo representa la constante de integración.

Problema resuelto

La función de Costo Marginal de fabricar un producto es $CM = 25x + 90$ donde x representa el número de unidades fabricadas, se conoce además que el costo total es de $35 000.00 cuando se fabrican 20 unidades.

Obtener el valor de la constante.

Respuesta

$CM = 25x + 90$

La función no se adecúa

solo se integra.

$$\int (25x + 90)\,dx$$

$$\int 25x\,dx + \int 90\,dx$$

$$25\int x\,dx + 90\int dx$$

$$25\frac{x^{1+1}}{1+1} + 90x + c$$

$$25\frac{x^2}{2} + 90x + c$$

$CT = 12.5x^2 + 90x + c$

$35\,000 = 12.5(20)^2 + 90(20) + c$

$35\,000 = 5\,000 + 1\,800 + c$

$35\,000 - 6\,800 = c$

$35\,000 - 6\,800 = 28\,200$

Paso 1: Identificar la información que se proporciona; *aquí es una función de costo marginal.*

Paso 2: Reconocer lo que solicita el problema; *se pide el valor de la constante, primero debe integrarse para quitarle lo marginal, despejando para obtener el valor de la constante de integración.*

Recuerda que al Integrar la función marginal esta se transforma en una función total.

El planteamiento indica que el costo total es de $35 000.00 cuando se fabrican 20 unidades, por ello en el costo total se sustituyen los $ 35 000 y en la x las unidades.

La constante de integración se obtiene de sustituir y despejar.

Problema resuelto

La función de Ingreso Marginal $8x^3 + 6x^2 + 20x + 5$ y su correspondiente función de Costo Marginal $3x^2 + 2x + 4$ donde x representa el número de unidades fabricadas.

Obtener la función de Utilidad Total y evalúa esta para cinco unidades.

Respuesta

$IM = 8x^3 + 6x^2 + 20x + 5$

$CM = 3x^2 + 2x + 4$

Las funciones deben relacionarse en una

recuerda $U = I - C$

Paso 1: Identificar la información que se proporciona; *aquí es una función de ingreso y costo marginal.*

$$\boldsymbol{U = I - C}$$

$$U = 8x^3 + 6x^2 + 20x + 5 - [3x^2 + 2x + 4]$$

$$U = 8x^3 + 6x^2 + 20x + 5 - 3x^2 - 2x - 4$$

$$U = 8x^3 + 3x^2 + 18x + 1$$

Paso 2: Reconocer lo que solicita el problema; *se pide obtener la utilidad por ello, primero se presenta la función de utilidad, para luego integrarse y después evaluarse.*

$$\int 8x^3\,dx + \int 3x^2\,dx + \int 18x\,dx + \int 1\,dx$$

$$8\int x^3\,dx + 3\int x^2\,dx + 18\int x\,dx + 1\int dx$$

$$8\frac{x^{3+1}}{3+1} + 3\frac{x^{2+1}}{2+1} + 18\frac{x^{1+1}}{1+1} + 1x + c$$

$$UT = 8\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} + 18\frac{x^2}{2} + x + c$$

$$UT = 2x^4 + x^3 + 9x^2 + x + c$$

$$UT = 2(5)^4 + (5)^3 + 9(5)^2 + (5) + c$$

$$UT = 1\,605 + c$$

Problemas para resolver

Resuelve las siguientes integrales indefinidas.

5.1 $\int\left(\frac{1}{x^2}\right)dx$

5.2 $\int(\sqrt[7]{x})\,dx$

5.3 $\int(\sqrt[5]{x^3})\,dx$

5.4 $\int(\sqrt[3]{x^5})\,dx$

5.5 $\int(7x^{\frac{8}{4}}+\sqrt[3]{x^9}+5)\,dx$

5.6 $\int\left(\frac{5}{\sqrt[4]{x^2}}\right)dx$

5.7 $\int\left(\frac{1}{\sqrt[2]{x^4}}+3x^5\right)dx$

5.8 $\int\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}\right)dx$

5.9 $\int\left(\frac{1}{x^2}+5\right)dx$

5.10 $\int\left(\frac{1}{x^3}+5x\right)dx$

5.11 $\int\left(\frac{1}{x^2}+\sqrt{x}\right)dx$

5.12 $\int\left(\frac{10x^3+10x^2}{x^2}\right)dx$

5.13 $\int\left(\frac{12}{3}x^4+7x^{\frac{8}{4}}+\sqrt[3]{x^3}\right)dx$

5.14 $\int(5x)^{-2}\,dx$

5.15 $\int(2x+100)^{-3}\,dx$

5.16 $\int(x^2+x)^2(2x+1)\,dx$

5.17 $\int(x^2+4)^4(x)\,dx$

5.18 $\int\left(\frac{dx}{\sqrt[3]{2x+7}}\right)$

5.19 $\int\left(\frac{1}{x}\right)dx$

5.20 $\int\left(\frac{2x+1}{x^2+x}\right)dx$

5.21 $\int\left(\frac{x^2-1}{x^3-3x}\right)dx$

Resuelve las siguientes integrales definidas.

5.22 $\int_2^8(3x^2-2x+5)\,dx$

5.23 $\int_2^5(x-3)^2\,dx$

5.24 $\int_3^6(\sqrt[4]{x^8}-2x+5)\,dx$

5.25 $\int_1^2(2x^4+3x^2+2x)\,dx$

5.26 $\int_1^7(\sqrt[3]{x^9}+4x^2)\,dx$

5.27 $\int_1^4(-2x^2+2x)^2\,dx$

5.28 $\int_{-1}^1(x^2+15x)\,dx$

5.29 $\int_{-1}^1(x^2+15x+5)\,dx$

Obtener los siguientes excedentes.

5.30 La función de demanda es $y=-2x^2+5x+30$ obtener el excedente del consumidor si el valor de $X_0=3$

5.31 Completa y resuelve el siguiente ejercicio de excedente del consumidor

$$E.C.=\int_0^1(-2x^3-3x^2+5x+12)\,dx-[(1)(P_0)]$$

5.32 La función de demanda es $y=-2x^2+3x+29$ obtener el excedente del consumidor si el valor de $Y_0=27$

5.33 Completa y resuelve el siguiente ejercicio de excedente del consumidor

$$E.C.=\int_0^{X_0}(-3x^2+5x+29)\,dx-[(X_0)(27)]$$

5.34 La función de oferta es $y=2x^3-10x^2-1x+3$ obtener el excedente del productor si el valor de $X_0=6$

SR Problemas aplicados a la realidad T Problemas para resolver con tecnología

5.35 Completa y resuelve el siguiente ejercicio de excedente del productor

$$E.P. = [(12)(P_0)] - \int_0^{12} (4x^3 - 20x^2 - 1x + 25)\,dx$$

5.36 La función de oferta es $y = 2x^2 - 5x + 10$ obtener el excedente del productor si el valor de $Y_0 = 13$

5.37 Completa y resuelve el siguiente ejercicio de excedente del productor

$$E.P. = [(X_0)(3)] - \int_0^{X_0} (3x^2 - 15x + 3)\,dx$$

5.38 Obtener el Excedente de consumidor si $X_0 = 4$ y su función es $y = -3x^2 + 6x + 30$

5.39 Obtener el Excedente del productor si $X_0 = 3$ y su función es $y = 5x^2 + 2x + 10$

5.40 Obtener el Excedente de consumidor si $X_0 = 1$ y su función es $y = -5x^3 - 5x + 15$

5.41 Obtener el Excedente del productor si $X_0 = 3$ y su función es $y = 2x^3 + x^2 + 3x + 2$

5.42 Obtener el Excedente de consumidor si $Y_0 = 8$ y su función es $y = -x^2 + 12$

5.43 Obtener el Excedente del productor si $Y_0 = 25$ y su función es $y = 2x^2 + 5x - 27$

5.44 La cantidad de demanda y el precio de equilibrio en un mercado están determinados por las funciones $y = -x^2 + 16$, $y = x + 4$ obtener ambos excedentes

5.45 La cantidad de demanda y el precio de equilibrio en un mercado están determinados por las funciones $y = 2x^2 + x - 2$, $y = -20x + 21$ de oferta y demanda correspondientemente, obtener ambos excedentes

Obtener las siguientes totalizaciones.

5.46 Una empresa presenta un $IM = 3x^2 - 5x - 11$, indica cuál es su ingreso, si su nivel de producción es de 100 unidades

5.47 Una empresa presenta un $CM = 2x^2 + 6x$, indica su costo total si su nivel de producción es de 100 unidades

5.48 En base a las dos ecuaciones anteriores obtener la utilidad total de la empresa si se sabe que su nivel de producción es de 100 unidades

5.49 Se tiene la siguiente función $CPM = -6x^3 + 39x^2 + 9x$ obtener el CP

5.50 La siguiente función representa el CM de un producto $CM = 2x^3 + 30x^2 - 9x - 1$ obtener el costo total de producir 50 unidades, si su costo fijo es de $645 000.00

5.51 $CM = 3x^2 + 2x + 5$ donde x representa el número de unidades fabricadas, si sabemos que el costo total es de $350 000, obtener la función de CT indicando cuál será el importe del costo fijo si se producen 55 unidades

PROBLEMAS RETO

Resuelve los siguientes problemas:

1 Indica cuál es el ingreso total que se obtiene por la venta de 100 unidades, cuando el precio de un producto se mantiene constante en $20.00 por unidad.

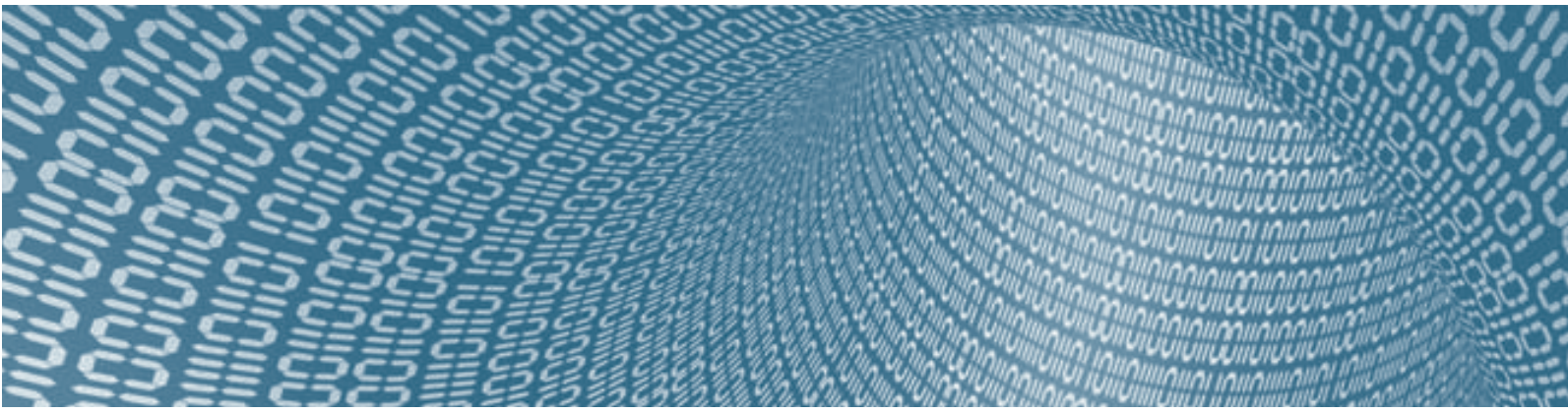
a) Indica los límites de la integral definida.

$$\int_{a}^{b} (\quad)\, dx$$

b) Calcula el ingreso total

2 La cantidad de demanda y el precio de equilibrio en un mercado son determinados por la siguiente oferta: en la compra de 10 artículos paga $10.00, compra el doble y ahorra 5% en su compra. Si su correspondiente función de demanda se ha calculado en $y = -2x^2 + 2x + 10$, obtener el excedente en cada caso.

UNIDAD 6



Operaciones matriciales, determinantes, cofactores e inversa de matrices

OBJETIVOS

- Identificar filas y columnas en una matriz.
- Identificar que el orden de una matriz ($m \times n$) se forma de filas por columnas.
- Identificar los distintos tipos de matrices.
- Realizar operaciones matriciales (suma, resta, multiplicación).
- Determinar matrices transpuestas.
- Calcular el determinante de una matriz.
- Calcular la matriz de cofactores.
- Identificar la inversa de una matriz.
- Solucionar por medio de matrices sistemas de ecuaciones simultáneas.

¿QUÉ SABES?

- ¿Una matriz identidad en su diagonal principal sólo contiene números uno?
- ¿Las matrices cambian su orden al transponerse?
- Si las filas de la primera matriz en número son diferentes de la segunda matriz, ¿el producto de matrices se puede realizar?
- ¿El determinante de una matriz A se identificará así $|A|$?
- ¿El determinante de una matriz se obtiene de la diferencia del producto de las diagonales principales y las diagonales secundarias?
- ¿Gauss-Jordan es un método de inversión de matrices?

6.1 Introducción

Una matriz es un arreglo rectangular de elementos que tiene como particularidad principal que pueden adoptar distintas formas de presentación, llamados arreglos matriciales, representando a sus términos, elementos o valores en filas o columnas.

6.2 Matriz de datos

Alerta

Una matriz es un arreglo rectangular con filas y columnas.

Arreglos numéricos rectangulares representados en filas o columnas generando en conjunto una matriz de datos, un arreglo rectangular de valores.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$ Matriz de datos

A cada elemento de la matriz de datos se le conoce con el nombre de término, el cual en valor es independiente de todos los demás, por ello el término *d* es independiente del término *b* y de todos los demás términos.

Representación de una matriz (*m* por *n*); el orden de una matriz

La representación de una matriz (*m* por *n*), la encontraremos constituida como un arreglo rectangular de datos o valores relacionados en filas y columnas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & b_{12} & c_{13} \\ d_{21} & e_{22} & f_{23} \end{pmatrix}$$ fila

columna

En la matriz de datos los términos representan un valor numérico unitario, y los subíndices indican la posición en la que este se encuentra, enlistándose en un respectivo orden, primero la fila y después la columna; por ejemplo, b_{12} se encuentra en la primera fila, pero en la segunda columna.

Alerta

El orden de una matriz se representa indicando primero el número de filas y después el número de columnas.

Por regla general, para representar una matriz debemos indicar en la parte inferior de la misma el valor (*m* por *n*), conociéndose este como *orden de matriz*, siendo el indicador de cuántas filas y cuántas columnas presenta el arreglo matricial.

6.3 Tipos de matrices

Existen distintos tipos de matrices, mismos que son resultado de diferentes representaciones de arreglos matriciales, con lo que encontramos una gran diversidad de estos arreglos de datos, los cuales deben su nombre a la representación que toman.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$ 2×2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$ 3×3

Matriz cuadrada: representación matricial que presenta el mismo número de filas y columnas.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 2×2 $\quad$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 3×3

Matriz identidad: representación matricial que como primer requisito debe ser cuadrada; como segundo requisito deberá tener en toda su diagonal principal la unidad y en los demás términos el valor cero.

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 2×2 $\quad$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 3×3

Matriz nula: representación matricial donde todos sus términos son ceros.

$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 2×2 $\quad$ $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ 3×3

Matriz escalar: representación matricial en donde se observa que solo en la diagonal principal sus términos son iguales.

$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$ 2×2 $\quad$ $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 7 \end{bmatrix}$ 3×3

Matriz triangular inferior: arreglo matricial que tiene arriba de la diagonal principal solo valores cero.

$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 2×2 $\quad$ $\begin{bmatrix} 4 & 8 & 9 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ 3×3

Matriz triangular superior: arreglo matricial que tiene abajo de la diagonal principal solo valores cero.

$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ 2×2 $\quad$ $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ 3×3

Matriz diagonal: representación matricial en la que los elementos que no están en la diagonal principal valen cero.

Arreglos especiales de matrices: *los siguientes arreglos son conocidos como arreglos especiales de transposición de matrices, muy importantes para el estudio de este capítulo, ya que en algunas ocasiones tendremos que utilizarlos.*

Fila pasa a columna

$\begin{bmatrix} 4 & 2 \end{bmatrix}$ 1×2 $\qquad$ $t' = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ 2×1

Matriz transpuesta (t')

Es una matriz diferente a la original por redimensionar su orden; es decir, transponerse, pasando de ser una fila a ser una columna o viceversa.

Alerta

Una matriz cambia su orden al transponerse.

6.4 Transposición de matrices

La transposición es una operación que puede aplicarse a una matriz para realizar cambios en su orden; es decir, pasar del orden de (3×2) a (2×3), de (4×5) a (5×4), pasar de ser fila a ser columna o viceversa.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 7 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \qquad t' = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 7 & -4 \end{bmatrix}$$

3×2 $\qquad$ 2×3

Matriz transpuesta (t'): matriz nueva y diferente a la original al redimensionar su orden, pasando sus valores de fila a columna o viceversa.

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 7 \\ -4 & 2 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad t' = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 7 \\ -4 & 2 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3×3 $\qquad$ 3×3

Matriz simétrica: representación matricial que al transponerse da como resultado que ambas matrices, tanto la original como la transpuesta, sean iguales.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & -4 \\ -1 & 0 & -7 & 2 \\ 3 & 7 & 0 & -5 \\ 4 & -2 & 5 & 0 \end{bmatrix} \qquad t' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 7 & -2 \\ -3 & -7 & 0 & 5 \\ -4 & 2 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

4×4 $\qquad$ 4×4

Matriz antisimétrica: es una matriz cuadrada donde los elementos de la diagonal principal son ceros, y los demás términos son los mismos pero de signo contrario cuando se transpone la matriz original.

Las operaciones a realizarse en el álgebra de matrices son: suma, resta y multiplicación.

6.5 Suma o resta de matrices

Dos matrices solo se pueden sumar o restar cuando tienen el mismo orden; es decir, ambas presentan el mismo número de términos, aplicándose la siguiente regla:

Las matrices se suman o restan si presentan la misma dimensión, el mismo número de términos, la primera con la segunda coincidiendo respectivamente los términos, al ser del mismo orden.

Para dar solución a una suma o resta de matrices se recomiendan los siguientes pasos:

Paso 1: Obtener el orden de la matriz

Por regla general antes de representar una matriz es conveniente indicar en la parte inferior de la misma el valor (*m* por *n*), conocido como *orden de matriz*.

Paso 2: Aplicar la regla para sumar o restar matrices

Recuerda que para aplicar la regla de la suma o resta de matrices, estas deben ser todas del mismo orden.

Paso 3: Obtener la matriz solución

Al realizar operaciones básicas y en ocasiones la aplicación de la ley de los signos se obtendrá el resultado de la matriz.

Alerta

La suma o diferencia de matrices se puede realizar si ambas matrices presentan el mismo orden.

Problema resuelto

Obtener el resultado de la suma de $A + B$.

$A =$ $\qquad B =$

Paso 1: Obtener el orden de la matriz; *ambas deben ser del mismo orden, en este caso son de (2 × 2).*

Respuesta

Paso 2: Aplicar la regla para sumar o restar matrices; *se aplica la regla sumando el primer término de la primera matriz con el primer término de la siguiente matriz.*

Paso 3: Obtener la matriz solución; *la solución de la matriz se obtiene al sumar valores correspondientes.*

Problema resuelto

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 7 & -5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 12 \\ 9 & 10 & 11 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 6 & 7 & -2 \\ 9 & 10 & 11 \end{bmatrix}$$

Obtener la matriz resultante de $A + B$, $B + A$, $A - B$, $B - A$, $A + C$ y $C + E$.

Respuesta

$A + B$

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 7 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 + (-4) & 3 + 2 \\ 4 + 7 & 8 + (-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 11 & 3 \end{bmatrix}$$

$B + A$

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 7 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-4) + 5 & 2 + 3 \\ 7 + 4 & (-5) + 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 11 & 3 \end{bmatrix}$$

$A - B$

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 7 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 - (-4) & 3 - 2 \\ 4 - 7 & 8 - (-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ -3 & 13 \end{bmatrix}$$

$B - A$

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 7 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-4) - 5 & 2 - 3 \\ 7 - 4 & (-5) - 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -1 \\ 3 & -13 \end{bmatrix}$$

$A + C$

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 1 & 12 \\ 9 & 10 & 11 \end{bmatrix} = [\textit{No se pueden resolver; son de distinto orden}]$$

$C + E$

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & 12 \\ 9 & 10 & 11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 7 & -2 \\ 9 & 10 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 + 6 & 1 + 7 & 12 + (-2) \\ 9 + 9 & 10 + 10 & 11 + 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 8 & 10 \\ 18 & 20 & 22 \end{bmatrix}$$

Efectúa las siguientes operaciones, indicando en cada caso el tipo de matriz de que se trata.

Problema resuelto

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 7 & -5 \end{bmatrix} =$$

Respuesta

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 7 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz nula

Problema resuelto

$$\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} =$$

Respuesta

$$\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz identidad

Problema resuelto

$$\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} =$$

Respuesta

$$\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriz triangular superior

Problema resuelto

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} =$$

Respuesta

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Matriz escalar

Problema resuelto

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} =$$

Respuesta

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$$

Matriz triangular inferior

Problema resuelto

$$\begin{bmatrix} 8 & 5 & -3 \\ -2 & 6 & 4 \\ -4 & 2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 4 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix} =$$

Respuesta

$$\begin{bmatrix} 8 & 5 & -3 \\ -2 & 6 & 4 \\ -4 & 2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & 4 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz identidad

6.6 Multiplicación de una matriz por un escalar

Para obtener el resultado de la multiplicación de un escalar por una matriz, bastará con multiplicar cada elemento de la matriz por el escalar.

Para dar solución al producto de un escalar por una matriz se recomiendan los siguientes pasos:

Paso 1: Obtener el orden de la matriz

Por regla general, antes de efectuar operaciones con una matriz es conveniente indicar en la parte inferior de la misma el valor (*m* por *n*), conocido como *orden de matriz*.

Paso 2: Multiplicar el valor del escalar por la matriz

El valor indicado fuera de la matriz será el que multiplique y represente la matriz tantas veces como su escalar lo indique.

Paso 3: Obtener la matriz resultante

La matriz ya multiplicada será utilizada para solucionar la operación que se solicite.

Alerta

La multiplicación de una matriz por un escalar se obtiene cuando cada elemento de la matriz se multiplica por el escalar, resultando una nueva matriz del mismo orden.

Problema resuelto

$$3\begin{bmatrix} \hexagon \\ \blacksquare \\ \circ \\ \pentagon \\ \diamond \end{bmatrix}$$

Paso 1: Obtener el orden de la matriz; *en la siguiente matriz se observan 5 filas y 1 columna, por eso se indica que la matriz es de (5 × 1).*

Respuesta

$$3\begin{bmatrix} \hexagon \\ \blacksquare \\ \circ \\ \pentagon \\ \diamond \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\hexagon \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$3\begin{bmatrix} \hexagon \\ \blacksquare \\ \circ \\ \pentagon \\ \diamond \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hexagon\hexagon\hexagon \\ \blacksquare\blacksquare\blacksquare \\ \circ\circ\circ \\ \pentagon\pentagon\pentagon \\ \diamond\diamond\diamond \end{bmatrix}$$

Al indicar su escalar tres veces, en la representación se encontrará cada término multiplicado tres veces.

Paso 2: Multiplicar el valor del escalar por la matriz; *el valor que se indica antecediendo la matriz es llamado escalar y se utiliza para multiplicar la matriz tantas veces como se indique, en este caso como el escalar indicado es 3, tres veces se ve representado.*

Paso 3: Obtener la matriz resultante; *la solución de la matriz se da multiplicando el valor del escalar por la matriz.*

Problema resuelto

$$A = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Obtener $X = \{2A - B + 4C\}$.

Respuesta

$$2\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -5 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ 14 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \\ 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{12} \\ \mathbf{36} \\ \mathbf{43} \end{bmatrix}$$

Problema resuelto

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 3 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$$

Obtener $Y = \{2A - 3B\}$.

Respuesta

$$2\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 3 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 12 & 6 \\ 14 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & 9 \\ -12 & 15 \\ -15 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{16} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{24} & \mathbf{-9} \\ \mathbf{29} & \mathbf{-14} \end{bmatrix}$$

6.7 Multiplicación de matrices

Para obtener el producto de dos matrices, dichas matrices no necesariamente deben ser iguales, es decir, no es requisito que tengan el mismo orden; en la operación de multiplicación se pueden multiplicar dos matrices totalmente diferentes, lo único que se requiere es que cumplan la siguiente regla:

Dos matrices se pueden multiplicar si el número de columnas de la primera es igual al número de filas de la segunda; es decir, si sus interiores son iguales.

Alerta

El producto de matrices se realiza con matrices conformables; es decir, el número de columnas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda matriz.

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 3 & 11 & 6 \\ -1 & 5 & 4 & 9 \\ -5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

2×3 $\quad$ 3×4

Interiores

Exteriores

ALERTA: Sus **interiores** determinarán si se pueden o no multiplicar. Sus **exteriores** al multiplicarse indicarán el número de resultados que la matriz resultado tendrá.

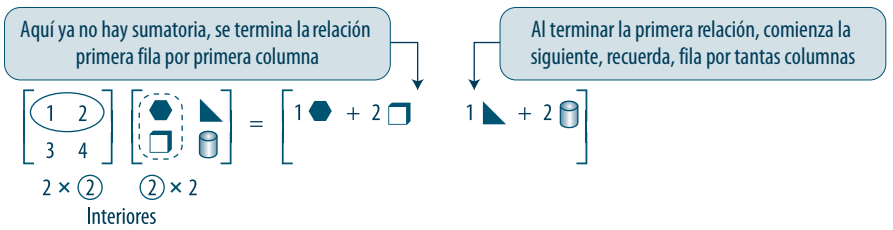
Para dar solución a un producto de matrices se recomiendan los siguientes pasos:

Paso 1: Verificar sus interiores

Al obtener el orden de cada matriz debemos ubicar sus interiores (columnas de la primera matriz iguales a filas de la segunda matriz), si son iguales se podrá multiplicar.

Paso 2: Multiplicar las matrices

Se comienza multiplicando el o los valores de la primera fila de la primera matriz por tantas columnas tenga la segunda matriz, colocando el producto obtenido en la fila resultante, considerando que cada que se termine una relación (*fila columna*), terminará su sumatoria.


Aquí ya no hay sumatoria, se termina la relación primera fila por primera columna
Al terminar la primera relación, comienza la siguiente, recuerda, fila por tantas columnas
1 2
3 4
1 + 2
1 + 2
2 × ②
②× 2
Interiores

Paso 3: Repetir el paso anterior tantas veces como filas tenga la primera matriz

El número de filas que contenga la primera matriz indicará el número de veces que el proceso se repetirá.

Paso 4: Obtención del resultado

Al realizar las operaciones correspondientes dentro de la matriz, se obtiene la matriz resultante, misma que en número de términos será igual a la multiplicación de los exteriores.

Alerta

La multiplicación de matrices se inicia al tomar la primera fila de la primera matriz y multiplicarla por tantas columnas tenga la segunda matriz, repitiéndose lo anterior con las filas siguientes de la primera matriz.

Problema resuelto

Obtener el producto de las siguientes matrices

$$\begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Respuesta

$$\begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$2 \times ②$ $②\times 2$

$$\begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8(5)+6(3) & 8(7)+6(4) \\ & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \\ 9(5)+2(3) & 9(7)+2(4) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8(5)+6(3) & 8(7)+6(4) \\ 9(5)+2(3) & 9(7)+2(4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 40+18 & 56+24 \\ 45+6 & 63+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{58} & \mathbf{80} \\ \mathbf{51} & \mathbf{71} \end{bmatrix}$$

Paso 1: Verificar sus interiores; *como sus interiores son iguales, el producto de matrices sí se puede realizar.*

Paso 2: Multiplicar las matrices; *se multiplican los valores al relacionar la fila de la primera matriz por los valores en columna de la segunda matriz:* **8** × **5** *MÁS* **6** × **3**

Concluyendo la sumatoria al terminar la relación fila columna, por ello el otro es:

8 × **7** *MÁS* **6** × **4**

Paso 3: Repetir el paso anterior tantas veces como filas tenga la primera matriz; *como la primera matriz tiene dos filas, una vez más se repite el paso anterior, pero ahora con la siguiente fila:*

9 × 5 *MÁS* 2 × 3

9 × 7 *MÁS* 2 × 4

Paso 4: Obtención del resultado; *después de sumar o restar los valores según el signo que tengan, se obtendrá la cantidad de resultados que indique la multiplicación de sus exteriores.*

Los resultados son: 4

Problema resuelto

Obtener el producto de las siguientes matrices

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

Respuesta

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

$2 \times ②$ $②\times 2$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(6)+3(5) & 2(7)+3(8) \\ & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \\ 1(6)+4(5) & 1(7)+4(8) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(6)+3(5) & 2(7)+3(8) \\ 1(6)+4(5) & 1(7)+4(8) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12+15 & 14+24 \\ 6+20 & 7+32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{27} & \mathbf{38} \\ \mathbf{26} & \mathbf{39} \end{bmatrix}$$

Paso 1: Verificar sus interiores; *recuerda, si los interiores son iguales, se pueden multiplicar.*

Paso 2: Multiplicar las matrices; *recuerda, fila (primera matriz) por columnas (segunda matriz).*

Primera parte

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ \square & \square \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & \square \\ 5 & \square \end{bmatrix}$$

Segunda parte

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ \square & \square \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \square & 7 \\ \square & 8 \end{bmatrix}$$

Paso 3: Repetir el paso anterior tantas veces como filas tenga la primera matriz; *como la primera matriz presenta dos filas, multiplicaremos otra vez.*

Primera parte

$$\begin{bmatrix} \square & \square \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & \square \\ 5 & \square \end{bmatrix}$$

Segunda parte

$$\begin{bmatrix} \square & \square \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \square & 7 \\ \square & 8 \end{bmatrix}$$

Paso 4: Obtención del resultado; *después de sumar o restar los valores según el signo que tengan, se obtendrá la cantidad de resultados que indique la multiplicación de sus exteriores.*

Los resultados son: 4

Problema resuelto

Obtener el producto de las siguientes matrices

$$\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Respuesta

$$\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$2 \times ②$ $②\times 2$

$$\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6(2)+7(1) & 6(3)+7(4) \\ & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \\ 5(2)+8(1) & 5(3)+8(4) \end{bmatrix}$$

Paso 1: Verificar sus interiores; *recuerda, si los interiores son iguales, se pueden multiplicar.*

Paso 2: Multiplicar las matrices; *recuerda, fila (primera matriz) por columnas (segunda matriz).*

Primera parte

$$\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ \square & \square \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & \square \\ 1 & \square \end{bmatrix}$$

Segunda parte

$$\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ \square & \square \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \square & 3 \\ \square & 4 \end{bmatrix}$$

Paso 3: Repetir el paso anterior tantas veces como filas tenga la primera matriz; *como la primera matriz tiene dos filas, una vez más multiplicaremos.*

Primera parte

$$\begin{bmatrix} \square & \square \\ 5 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & \square \\ 1 & \square \end{bmatrix}$$

Segunda parte

$$\begin{bmatrix} \square & \square \\ 5 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \square & 3 \\ \square & 4 \end{bmatrix}$$

Respuesta (*continuación*)

$$\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6(2)+7(1) & 6(3)+7(4) \\ 5(2)+8(1) & 5(3)+8(4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12+7 & 18+28 \\ 10+8 & 15+32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{19} & \mathbf{46} \\ \mathbf{18} & \mathbf{47} \end{bmatrix}$$

Paso 4: Obtención del resultado; *después de sumar o restar los valores según el signo que tengan, se obtendrá la cantidad de resultados que indique la multiplicación de sus exteriores.*

Los resultados son: 4

En estos problemas con solo cambiar un dato o modificar su orden el resultado es diferente: obsérvese que son las mismas matrices que en el problema anterior, solo que están en otra disposición y por ello el resultado es diferente.

Problema resuelto

Obtener el producto de las siguientes matrices

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -7 \end{bmatrix}$$

Respuesta

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -7 \end{bmatrix}$$

$3 \times ①$ $①\times 2$

Como sus interiores son iguales, sí se puede multiplicar y por sus exteriores se obtendrán seis resultados.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(5) & 1(-7) \\ & \\ & \end{bmatrix}$$

Aquí no hay sumatoria porque en la segunda matriz no hay más valores en columna, por lo tanto no hay más que sumar.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(5) & 2(-7) \\ & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \\ 3(5) & 3(-7) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(5) & 1(-7) \\ 2(5) & 2(-7) \\ 3(5) & 3(-7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{-7} \\ \mathbf{10} & \mathbf{-14} \\ \mathbf{15} & \mathbf{-21} \end{bmatrix}$$

Paso 1: Verificar sus interiores; *recuerda, si los interiores son iguales, se pueden multiplicar.*

Paso 2: Multiplicar las matrices; *recuerda, fila (primera matriz) por columnas (segunda matriz).*

Primera parte

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \square \\ \square \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & \square \end{bmatrix}$$

Segunda parte

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \square \\ \square \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \square & -7 \end{bmatrix}$$

Paso 3: Repetir el paso anterior tantas veces como filas tenga la primera matriz; *como la primera matriz tiene tres filas, multiplicaremos dos ocasiones más.*

$$\begin{bmatrix} \square \\ 2 \\ \square \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & \square \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \square \\ 2 \\ \square \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \square & -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \square \\ \square \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & \square \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \square \\ \square \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \square & -7 \end{bmatrix}$$

Paso 4: Obtención del resultado; *después de sumar o restar los valores según el signo que tengan, se obtendrá la cantidad de resultados que indique la multiplicación de sus exteriores.*

Los resultados son: 6

Alerta

Dos matrices de distinto orden se pueden multiplicar, si el número de columnas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda matriz.

Alerta

Al realizar el producto de matrices, si sus interiores son iguales, el producto se puede obtener.

Problema resuelto

Obtener el producto de las siguientes matrices

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 7 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Respuesta

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 7 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$3 \times ②$ $②\times 2$

Como sus interiores son iguales, sí se puede multiplicar y por sus exteriores se obtendrán seis resultados.

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 7 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(1)+6(4) & 3(7)+6(5) \\ & \end{bmatrix}$$

Aquí la sumatoria se da porque en la segunda matriz hay dos valores en la columna.

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 7 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7(1)-2(4) & 7(7)-2(5) \\ & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 7 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \\ 4(1)+5(4) & 4(7)+5(5) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 7 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(1)+6(4) & 3(7)+6(5) \\ 7(1)-2(4) & 7(7)-2(5) \\ 4(1)+5(4) & 4(7)+5(5) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3+24 & 21+30 \\ 7-8 & 49-10 \\ 4+20 & 28+25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{27} & \mathbf{51} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{39} \\ \mathbf{24} & \mathbf{53} \end{bmatrix}$$

Paso 1: Verificar sus interiores; *recuerda, si los interiores son iguales, se pueden multiplicar.*

Paso 2: Multiplicar las matrices; *recuerda, fila (primera matriz) por columnas (segunda matriz).*

Primera parte

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \square \\ 4 & \square \end{bmatrix}$$

Segunda parte

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \square & 7 \\ \square & 5 \end{bmatrix}$$

Paso 3: Repetir el paso anterior tantas veces como filas tenga la primera matriz; *como la primera matriz tiene tres filas, multiplicaremos dos ocasiones más.*

$$\begin{bmatrix} \square & \square \\ 7 & -2 \\ \square & \square \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \square \\ 4 & \square \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \square & \square \\ 7 & -2 \\ \square & \square \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \square & 7 \\ \square & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & \square \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \square \\ 4 & \square \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & \square \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \square & 7 \\ \square & 5 \end{bmatrix}$$

Paso 4: Obtención del resultado; *después de sumar o restar los valores según el signo que tengan, se obtendrá la cantidad de resultados que indique la multiplicación de sus exteriores.*

Los resultados son: 6

Problema resuelto

Obtener el producto de las siguientes matrices $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$

Respuesta

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$1 \times ③$ $③ \times 1$

Aquí se obtiene un resultado porque la relación fila columna no termina.

Paso 1: Verificar sus interiores; *como sus interiores son iguales, sí se puede multiplicar.*

Respuesta (*continuación*)

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(5) + 4(6) + 3(1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} = [\mathbf{37}]$$

Paso 2: Multiplicar las matrices; *recuerda, fila (primera matriz) por columnas (segunda matriz).*

Primera y única parte $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$

Paso 3: Repetir el paso anterior tantas veces como filas tenga la primera matriz; *al no tener una segunda fila la primera matriz, no hay otra multiplicación.*

Paso 4: Obtención del resultado; *el único valor* [37].

Problema resuelto

Obtener el producto de las siguientes matrices $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 6 & 8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$

Respuesta

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 6 & 8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$1 \times ③$ $③ \times 2$

Como sus interiores son iguales, sí se puede multiplicar y por sus exteriores se obtendrán dos resultados.

Aquí se obtienen dos resultados, porque en dos ocasiones hay cambio de columna; es decir, en dos ocasiones se termina la relación fila columna.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 6 & 8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(5) + 4(6) + 3(1) & 2(9) + 4(8) + 3(7) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 6 & 8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{37} & \mathbf{71} \end{bmatrix}$$

Problema resuelto

Obtener el producto de las siguientes matrices $\begin{bmatrix} 1 & -5 & 9 \\ 5 & 2 & 8 \\ 7 & 3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 9 \\ -8 & 3 & 0 \\ -6 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Respuesta

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 9 \\ 5 & 2 & 8 \\ 7 & 3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 9 \\ -8 & 3 & 0 \\ -6 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$3 \times ③$ $③ \times 3$

$$= \begin{bmatrix} 1(-2) - 5(-8) + 9(-6) & 1(0) - 5(3) + 9(1) & 1(9) - 5(0) + 9(-1) \\ 5(-2) + 2(-8) + 8(-6) & 5(0) + 2(3) + 8(1) & 5(9) + 2(0) + 8(-1) \\ 7(-2) + 3(-8) + 6(-6) & 7(0) + 3(3) + 6(1) & 7(9) + 3(0) + 6(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 + 40 - 54 & 0 - 15 + 9 & 9 + 0 - 9 \\ -10 - 16 - 48 & 0 + 6 + 8 & 45 + 0 - 8 \\ -14 - 24 - 36 & 0 + 9 + 6 & 63 + 0 - 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{-16} & \mathbf{-6} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-74} & \mathbf{14} & \mathbf{37} \\ \mathbf{-74} & \mathbf{15} & \mathbf{57} \end{bmatrix}$$

Alerta

Al realizar el producto de matrices, sus exteriores indicarán el número de términos que tendrá la matriz resultante.

Problema resuelto

Obtener el producto de las siguientes matrices $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 7 & 3 & 9 \\ 4 & 6 & 7 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -3 & -4 \\ -2 & -6 \\ -1 & -8 \end{bmatrix}$

Respuesta

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 7 & 3 & 9 \\ 4 & 6 & 7 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -3 & -4 \\ -2 & -6 \\ -1 & -8 \end{bmatrix}$$

$3 \times ④ \qquad ④ \times 2$

$$= \begin{bmatrix} 2(-5)+5(-3)+4(-2)+1(-1) & 2(-2)+5(-4)+4(-6)+1(-8) \\ 1(-5)+7(-3)+3(-2)+9(-1) & 1(-2)+7(-4)+3(-6)+9(-8) \\ 4(-5)+6(-3)+7(-2)+2(-1) & 4(-2)+6(-4)+7(-6)+2(-8) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -10-15-8-1 & -4-20-24-8 \\ -5-21-6-9 & -2-28-18-72 \\ -20-18-14-2 & -8-24-42-16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{-34} & \mathbf{-56} \\ \mathbf{-41} & \mathbf{-120} \\ \mathbf{-54} & \mathbf{-90} \end{bmatrix}$$

Alerta

Cuando una matriz se encuentra elevada a una potencia, su resultado es la multiplicación de la matriz tantas veces como lo indique su potencia.

Problema resuelto

Obtener el producto de las siguientes matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^2$$

Respuesta

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$2 \times ② \quad ② \times 2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(1)+2(3) & 1(2)+2(4) \\ & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \\ 3(1)+4(3) & 3(2)+4(4) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(1)+2(3) & 1(2)+2(4) \\ 3(1)+4(3) & 3(2)+4(4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+6 & 2+8 \\ 3+12 & 6+16 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{10} \\ \mathbf{15} & \mathbf{22} \end{bmatrix}$$

Paso 1: Verificar sus interiores; *recuerda, si los interiores son iguales, se pueden multiplicar.*

Paso 2: Multiplicar las matrices; *recuerda, fila (primera matriz) por columnas (segunda matriz).*

Primera parte $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \square & \square \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \square \\ 3 & \square \end{bmatrix}$ Segunda parte $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \square & \square \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \square & 2 \\ \square & 4 \end{bmatrix}$

Paso 3: Repetir el paso anterior tantas veces como filas tenga la primera matriz; *como la primera matriz tiene dos filas, una vez más multiplicaremos.*

Primera parte $\begin{bmatrix} \square & \square \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \square \\ 3 & \square \end{bmatrix}$ Segunda parte $\begin{bmatrix} \square & \square \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \square & 2 \\ \square & 4 \end{bmatrix}$

Paso 4: Obtención del resultado; *después de sumar o restar los valores según el signo que tengan, se obtendrá la cantidad de resultados que indique la multiplicación de sus exteriores.*

Los resultados son: 4

La multiplicación por transposición de matrices; un caso especial

Obtener el producto de las siguientes matrices $\underset{1\times③}{\begin{bmatrix}1&3&5\end{bmatrix}}\underset{②\times 3}{\begin{bmatrix}2&4&6\\7&8&9\end{bmatrix}}$ *Interiores diferentes así no se pueden multiplicar*

En este problema sus interiores son diferentes, como no se cumple la regla de la multiplicación, no se puede multiplicar, pero al inicio del capítulo se presentó un procedimiento llamado transposición de matriz, por lo que aquí realizaremos la transpuesta de una matriz, por ello si transponemos la segunda, su orden cambiaría a $3 \times ②$.

$$\underset{2\times 3}{\begin{bmatrix}2&4&6\\7&8&9\end{bmatrix}} \qquad t' = \underset{3\times 2}{\begin{bmatrix}2&7\\4&8\\6&9\end{bmatrix}}$$

$$\underset{1\times③}{\begin{bmatrix}1&3&5\end{bmatrix}}\underset{③\times 2}{\begin{bmatrix}2&7\\4&8\\6&9\end{bmatrix}}$$

Como aquí sus interiores son iguales, ya se puede multiplicar.

$$\begin{bmatrix}1&3&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&7\\4&8\\6&9\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1(2)+3(4)+5(6) & 1(7)+3(8)+5(9)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}44 & 76\end{bmatrix}$$

Problema resuelto

Obtener el producto de las siguientes matrices $\underset{1\times②}{\begin{bmatrix}-1&2\end{bmatrix}}\underset{③\times 2}{\begin{bmatrix}1&0\\3&6\\1&-7\end{bmatrix}}$ *Interiores diferentes así no se pueden multiplicar*

En caso de que los interiores sean diferentes, utiliza la transpuesta de la segunda matriz.

Respuesta

$$\underset{3\times 2}{\begin{bmatrix}1&0\\3&6\\1&-7\end{bmatrix}} \qquad t' = \underset{2\times 3}{\begin{bmatrix}1&3&1\\0&6&-7\end{bmatrix}}$$

$$\underset{1\times②}{\begin{bmatrix}-1&2\end{bmatrix}}\underset{②\times 3}{\begin{bmatrix}1&3&1\\0&6&-7\end{bmatrix}} = \begin{bmatrix}-1(1)+2(0) & -1(3)+2(6) & -1(1)+2(-7)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-1 & 9 & -15\end{bmatrix}$$

En ocasiones no se podrá efectuar la multiplicación original, ni la multiplicación por transpuesta.

Alerta

Cuando los interiores sean distintos, una opción para darle solución es transponer la matriz.

6.8 Determinante de una matriz

Es un concepto importante dentro del álgebra matricial, asociándose a matrices cuadradas de tamaño $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$, expresándose el determinante de la matriz A como la representación del nombre de la matriz entre líneas $|A|$.

Alerta

El determinante de una matriz se expresa entre dos líneas $\left|\square\right|$.

Para obtener el determinante de una matriz se recomienda realizar los siguientes pasos:

Paso 1: Verificar que la matriz sea cuadrada

Las matrices cuadradas son arreglos numéricos colocados en filas y columnas de orden (2 × 2), (3 × 3) o mayores.

Paso 2: Obtención del determinante de la matriz

Alerta

En una matriz de 2 × 2 el determinante se obtiene sin hacer adecuaciones.

En una matriz de (2 × 2) se multiplican en forma cruzada los valores de la matriz, para luego restarlos.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \left[(a_{11})(a_{22}) - (a_{21})(a_{12})\right] = \textit{Determinante de la matriz}$$

Alerta

En una matriz de 3 × 3 el determinante se obtiene al hacer una adecuación a la matriz.

En una matriz de (3 × 3) se realiza una pequeña adecuación que consiste en reescribir las dos primeras columnas a la derecha de la matriz, formando una matriz de 3 filas y 5 columnas de donde se obtendrá el valor del determinante.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \textit{La nueva matriz}$$

$$\left[(a_{11})(a_{22})(a_{33}) + (a_{12})(a_{23})(a_{31}) + (a_{13})(a_{21})(a_{32})\right] - \left[(a_{31})(a_{22})(a_{13}) + (a_{32})(a_{23})(a_{11}) + (a_{33})(a_{21})(a_{12})\right]$$

El resultado de la diferencia entre las diagonales principales y las diagonales secundarias será el valor del determinante en una matriz de 3 × 3

Problema resuelto

Obtener el determinante de la siguiente matriz $A = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Paso 1: Verificar que la matriz sea cuadrada; *es cuadrada, es de 2 × 2*

Respuesta

$$|A| = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \left[(7)(2) - (1)(5)\right] = 14 - 5 = 9$$

Paso 2: Obtención del determinante de la matriz; *recuerda, se multiplica en forma cruzada y se resta.*

Alerta

En una matriz de 2 × 2 el determinante se obtiene sin hacer adecuaciones.

Problema resuelto

Obtener el determinante de la siguiente matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

Paso 1: Verificar que la matriz sea cuadrada; *es de 2 × 2*

Respuesta

$$|A| = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \left[(2)(2) - (3)(1)\right] = 4 - 3 = 1$$

Paso 2: Obtención del determinante de la matriz; *recuerda, se multiplica en forma cruzada y se resta.*

Problema resuelto

Obtener el determinante de la siguiente matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

Paso 1: Verificar que la matriz sea cuadrada; *es de 2 × 2*

Respuesta

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = [(2)(5) - (3)(4)] = 10 - 12 = -2$$

Paso 2: Obtención del determinante de la matriz; *recuerda, se multiplica en forma cruzada y se resta.*

Problema resuelto

Obtener el determinante de la siguiente matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 9 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

Paso 1: Verificar que la matriz sea cuadrada; *es de 2 × 2*

Respuesta

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 9 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = [(-1)(-1) - (3)(9)] = 1 - 27 = -26$$

Paso 2: Obtención del determinante de la matriz; *recuerda, se multiplica en forma cruzada y se resta.*

Problema resuelto

Obtener el determinante de la siguiente matriz $A = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$

Paso 1: Verificar que la matriz sea cuadrada; *es de 2 × 2*

Respuesta

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = [(-3)(-2) - (-4)(-1)] = 6 - 4 = 2$$

Paso 2: Obtención del determinante de la matriz; *recuerda, se multiplica en forma cruzada y se resta.*

En un problema de orden de 3 × 3 se hace lo siguiente:

Problema resuelto

Obtener el determinante de la siguiente matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Paso 1: Verificar que la matriz sea cuadrada; *es cuadrada, es de 3 × 3*

Respuesta

Aquí se observa su adecuación

Paso 2: Obtención del determinante de la matriz; *recuerda, se multiplica en forma cruzada y se resta.*

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 1 \\ 6 & 4 \\ 2 & 1 \end{matrix} = \begin{matrix} \text{Tres diagonales primarias} \\ \begin{matrix} 3 & 1 & 2 & \square & \square \\ \searrow & 4 & 5 & 6 & \square \\ \square & \searrow & 3 & 2 & 1 \end{matrix} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{y tres secundarias} \\ \begin{matrix} \square & \nearrow & 2 & 3 & 1 \\ \nearrow & 4 & 5 & 6 & \square \\ 2 & 1 & 3 & \square & \square \end{matrix} \end{matrix}$$

$$[(3)(4)(3) + (1)(5)(2) + (2)(6)(1)] - [(2)(4)(2) + (1)(5)(3) + (3)(6)(1)] =$$
$$[(36) + (10) + (12)] - [(16) + (15) + (18)] = [(58) - (49)] = 9$$

Alerta

En una matriz de 3 × 3 el determinante se obtiene al hacer una adecuación a la matriz.

Problema resuelto

Obtener el determinante de la siguiente matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Paso 1: Verificar que la matriz sea cuadrada; *es cuadrada, es de 3 × 3*

Respuesta

Paso 2: Obtención del determinante de la matriz; *recuerda, se multiplica en forma cruzada y se resta, solo que en una matriz de 3 × 3 se realiza una* adecuación que consiste en reescribir las dos primeras columnas a la derecha de la matriz, formando una matriz de 3 filas y 5 columnas.

Aquí se observa su adecuación

$$|A| = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 5 & 3 & 5 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} =$$

Tres diagonales primarias y tres secundarias

$$\begin{Bmatrix} 5 & 5 & 3 & \square & \square \\ \square & 4 & 3 & 5 & \square \\ \square & \square & 2 & 3 & 2 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \square & \square & 3 & 5 & 5 \\ \square & 4 & 3 & 5 & \square \\ 3 & 2 & 2 & \square & \square \end{Bmatrix}$$

$$[(5)(4)(2) + (5)(3)(3) + (3)(5)(2)] - [(3)(4)(3) + (2)(3)(5) + (2)(5)(5)] =$$
$$[(40) + (45) + (30)] - [(36) + (30) + (50)] = [(115) - (116)] = -1$$

Problema resuelto

Obtener el determinante de la siguiente matriz $A = \begin{bmatrix} -5 & -1 & -4 \\ 1 & -3 & -2 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

Respuesta

$$|A| = \begin{bmatrix} -5 & -1 & -4 & -5 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & -3 & -2 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$[(-5)(-3)(-3) + (-1)(-2)(-2) + (-4)(1)(3)] - [(-2)(-3)(-4) + (3)(-2)(-5) + (-3)(1)(-1)] =$$
$$[(-45) + (-4) + (-12)] - [(-24) + (30) + (3)] = [(-61) - (9)] = -70$$

Problema resuelto

Obtener el determinante de la siguiente matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

Respuesta

$$|A| = \begin{bmatrix} 2 & 9 & 4 & 2 & 9 \\ 7 & 5 & 3 & 7 & 5 \\ 6 & 1 & 8 & 6 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$[(2)(5)(8) + (9)(3)(6) + (4)(7)(1)] - [(6)(5)(4) + (1)(3)(2) + (8)(7)(9)] =$$
$$[(80) + (162) + (28)] - [(120) + (6) + (504)] = [(270) - (630)] = -360$$

Únicamente que los métodos expuestos solo son aplicables en cada caso; es decir, el procedimiento visto para una matriz cuadrada de (2 × 2) solo es aplicable a una matriz de (2 × 2) y lo mismo pasa con la de (3 × 3), no puede aplicarse cualquiera de estos procedimientos a una matriz cuadrada de orden superior.

Para hacerlo, puede utilizarse un procedimiento más generalizado denominado método de cofactores.

6.9 Método de cofactores

El procedimiento de cofactores es un método de cálculo general aplicable a matrices cuadradas, muy útil cuando el orden de la matriz comienza a ser grande, indicándose que para cualquier matriz cuadrada A existe una matriz de cofactores A_c.

Donde la matriz de cofactores tendrá el mismo número de términos y la misma dimensión que la principal, al emplearse el menor asociado; el elemento a_{ij}.

El menor asociado; el elemento a_{ij}

El menor asociado el elemento a_{ij} es el determinante resultante de eliminar de la matriz cuadrada la i-ésima fila y la j-ésima columna.

En una matriz cuadrada de orden (2 × 2) el menor se obtiene al eliminar los términos de la i-ésima fila y la j-ésima columna; es decir, la cancelación de los valores de la fila para luego cancelar los de la columna, dejando libre y sin cancelar el menor asociado; obsérvese lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Al eliminar una fila y una columna el menor asociado puede ser:

$\begin{pmatrix} \not{a}_{11} & \not{a}_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_{11} & \not{a}_{12} \\ \not{a}_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \not{a}_{21} & \not{a}_{22} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_{11} & \not{a}_{12} \\ \not{a}_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$
Al eliminar la primera fila y la primera columna, a_{ij} es el valor no cancelado, por tanto el menor asociado es el valor del término a_{22}	Al eliminar la primera fila y la segunda columna, a_{ij} es el valor no cancelado, por tanto el menor asociado será el valor del término a_{21}	Al eliminar la segunda fila y la primera columna, a_{ij} es el valor no cancelado, por tanto el menor asociado será el valor del término a_{12}	Al eliminar la segunda fila y la segunda columna, a_{ij} es el valor no cancelado, por tanto el menor asociado será el valor del término a_{11}

En una matriz cuadrada de orden (2 × 2) obtendremos cuatro menores asociados y su ubicación es esencial al aplicarse la fórmula $Cofactor = (-1)^{i+j}\begin{pmatrix} el\ menor \\ a_{ij} \end{pmatrix}$ ya que el exponente al que esté elevado lo indicará la anterior cancelación, al relacionar fila columna.

Para a_{11} tenemos: $(-1)^{i+j}\begin{pmatrix} el\ menor \\ a_{ij} \end{pmatrix} = (-1)^{1+1}$ (*valor no cancelado*)

Para a_{22} tenemos: $(-1)^{i+j}\begin{pmatrix} el\ menor \\ a_{ij} \end{pmatrix} = (-1)^{2+2}$ (*valor no cancelado*)

Al estar elevados a una potencia par no cambian de signo.

Para a_{21} tenemos: $(-1)^{i+j}\begin{pmatrix} el\ menor \\ a_{ij} \end{pmatrix} = (-1)^{2+1}$ (*valor no cancelado*)

Para a_{12} tenemos: $(-1)^{i+j}\begin{pmatrix} el\ menor \\ a_{ij} \end{pmatrix} = (-1)^{1+2}$ (*valor no cancelado*)

Al estar elevados a una potencia impar cambiarán de signo.

Como ya sabemos calcular determinantes y el elemento a_{ij} calculamos cofactores.
Para aplicar el método de cofactores se recomiendan los siguientes pasos:

Paso 1: Emplear una matriz cuadrada de (2 × 2) o superiores

Se utilizará una matriz cuadrada de orden (2 × 2), (3 × 3) o mayores.

Paso 2: Obtención del elemento a_{ij}

En una matriz de orden (2 × 2) se obtendrán 4 elementos a_{ij}.
En una matriz de orden (3 × 3) se obtendrán 9 elementos a_{ij}.

Paso 3: Obtención de la matriz de cofactores

Al tener los elementos a_{ij} se formará la matriz de cofactores.

Problema resuelto

Obtener la matriz de cofactores de la siguiente matriz $A = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Paso 1: Emplear una matriz cuadrada; *es cuadrada 2 × 2*

Respuesta

$\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ El elemento $a_{ij} = 2$ su ubicación en la matriz será a_{11}

El cofactor es: $(-1)^{1+1}\begin{pmatrix} el\ menor \\ a_{ij} \end{pmatrix} = (-1)^2(2) = (1)(2) = 2$

$\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ El elemento $a_{ij} = 1$ su ubicación en la matriz será a_{12}

El cofactor es: $(-1)^{1+2}\begin{pmatrix} el\ menor \\ a_{ij} \end{pmatrix} = (-1)^3(1) = (-1)(1) = -1$

$\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ El elemento $a_{ij} = 5$ su ubicación en la matriz será a_{21}

El cofactor es: $(-1)^{2+1}\begin{pmatrix} el\ menor \\ a_{ij} \end{pmatrix} = (-1)^3(5) = (-1)(5) = -5$

$\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ El elemento $a_{ij} = 7$ su ubicación en la matriz será a_{22}

El cofactor es: $(-1)^{2+2}\begin{pmatrix} el\ menor \\ a_{ij} \end{pmatrix} = (-1)^4(7) = (1)(7) = 7$

Paso 2: Obtención del elemento a_{ij}; *recuerda que en una matriz de 2 × 2 serán cuatro elementos menor asociado los que resultarán y que servirán para integrar la matriz de cofactores en el paso siguiente.*

La matriz de cofactores es: $A_c = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ \downarrow & \downarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$

Paso 3: Obtención de la matriz de cofactores.

Problema resuelto

Obtener la matriz de cofactores de la siguiente matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

Respuesta

$\begin{bmatrix} \not{2} & \not{1} \\ \not{3} & 2 \end{bmatrix}$

El cofactor es: $(-1)^{1+1}(2)$
$(-1)^2(2) = (1)(2) = 2$

$\begin{bmatrix} \not{2} & 1 \\ 3 & \not{2} \end{bmatrix}$

El cofactor es: $(-1)^{1+2}(3)$
$(-1)^3(3) = (-1)(3) = -3$

$\begin{bmatrix} 2 & \not{1} \\ \not{3} & 2 \end{bmatrix}$

El cofactor es: $(-1)^{2+1}(1)$
$(-1)^3(1) = (-1)(1) = -1$

$\begin{bmatrix} 2 & \not{1} \\ \not{3} & 2 \end{bmatrix}$

El cofactor es: $(-1)^{2+2}(2)$
$(-1)^4(2) = (1)(2) = 2$

La matriz de cofactores es: $A_c = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Problema resuelto

Obtener la matriz de cofactores de la siguiente matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

Respuesta

$\begin{bmatrix} \not{2} & \not{4} \\ \not{3} & 5 \end{bmatrix}$

El cofactor es: $(-1)^{1+1}(5)$
$(-1)^2(5) = (1)(5) = 5$

$\begin{bmatrix} \not{2} & \not{4} \\ \not{3} & 5 \end{bmatrix}$

El cofactor es: $(-1)^{1+2}(3)$
$(-1)^3(3) = (-1)(3) = -3$

$\begin{bmatrix} 2 & \not{4} \\ \not{3} & \not{5} \end{bmatrix}$

El cofactor es: $(-1)^{2+1}(4)$
$(-1)^3(4) = (-1)(4) = -4$

$\begin{bmatrix} 2 & \not{4} \\ \not{3} & \not{5} \end{bmatrix}$

El cofactor es: $(-1)^{2+2}(2)$
$(-1)^4(2) = (1)(2) = 2$

La matriz de cofactores es: $A_c = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

Problema resuelto

Obtener la matriz de cofactores de la siguiente matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$

Respuesta

$\begin{bmatrix} \not{-2} & \not{-4} \\ \not{-1} & -5 \end{bmatrix}$

El cofactor es: $(-1)^{1+1}(-5)$
$(-1)^2(-5) = (1)(-5) = -5$

$\begin{bmatrix} \not{-2} & \not{-4} \\ \not{-1} & -5 \end{bmatrix}$

El cofactor es: $(-1)^{1+2}(-1)$
$(-1)^3(-1) = (-1)(-1) = 1$

Alerta

Al calcular una matriz de cofactores de orden 2×2 se obtiene una matriz del mismo orden pero de cofactores.

Respuesta (*continuación*)

$\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$

El cofactor es: $(-1)^{2+1}(-4)$
$(-1)^3(-4) = (-1)(-4) = 4$

$\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$

El cofactor es: $(-1)^{2+2}(-2)$
$(-1)^4(-2) = (1)(-2) = -2$

La matriz de cofactores es: $A_c = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

Problema resuelto

Obtener la matriz de cofactores de la siguiente matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Respuesta

$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

El cofactor es: $(-1)^{1+1}(3)$
$(-1)^2(3) = (1)(3) = 3$

$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

El cofactor es: $(-1)^{1+2}(1)$
$(-1)^3(1) = (-1)(1) = -1$

$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

El cofactor es: $(-1)^{2+1}(-1)$
$(-1)^3(-1) = (-1)(-1) = +1$

$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

El cofactor es: $(-1)^{2+2}(2)$
$(-1)^4(2) = (1)(2) = 2$

La matriz de cofactores es: $A_c = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

En una matriz de 3 × 3 el menor es el determinante de una submatriz; véase lo siguiente.

Problema resuelto

Obtener la matriz de cofactores de la siguiente matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Paso 1: Emplear una matriz cuadrada; *es cuadrada* 3 × 3.

Respuesta

Paso 2: Obtención del elemento a_{ij}; *aquí se obtendrán nueve elementos menor asociado.*

$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ $(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^2[(4)(3) - (1)(5)] = (-1)^2[12 - 5] = 1[7] = 7$

$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ $(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^3[(6)(3) - (2)(5)] = (-1)^3[18 - 10] = -1[8] = -8$

Respuesta (*continuación*)

$$\begin{bmatrix} \cancel{3} & \cancel{1} & \cancel{2} \\ \cancel{6} & 4 & 5 \\ \cancel{2} & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^4[(6)(1) - (2)(4)] = (-1)^4[6 - 8] = 1[-2] = -2$$

$$\begin{bmatrix} \cancel{3} & \cancel{1} & \cancel{2} \\ \cancel{6} & \cancel{4} & \cancel{5} \\ \cancel{2} & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^3[(1)(3) - (1)(2)] = (-1)^3[3 - 2] = -1[1] = -1$$

$$\begin{bmatrix} 3 & \cancel{1} & \cancel{2} \\ \cancel{6} & \cancel{4} & \cancel{5} \\ \cancel{2} & \cancel{1} & 3 \end{bmatrix} \quad (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^4[(3)(3) - (2)(2)] = (-1)^4[9 - 4] = 1[5] = 5$$

$$\begin{bmatrix} 3 & \cancel{1} & \cancel{2} \\ \cancel{6} & \cancel{4} & \cancel{5} \\ \cancel{2} & \cancel{1} & 3 \end{bmatrix} \quad (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^5[(3)(1) - (2)(1)] = (-1)^5[3 - 2] = -1[1] = -1$$

$$\begin{bmatrix} \cancel{3} & \cancel{1} & \cancel{2} \\ \cancel{6} & 4 & 5 \\ \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{3} \end{bmatrix} \quad (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^4[(1)(5) - (4)(2)] = (-1)^4[5 - 8] = 1[-3] = -3$$

$$\begin{bmatrix} \cancel{3} & \cancel{1} & \cancel{2} \\ \cancel{6} & \cancel{4} & \cancel{5} \\ \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{3} \end{bmatrix} \quad (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^5[(3)(5) - (6)(2)] = (-1)^5[15 - 12] = -1[3] = -3$$

$$\begin{bmatrix} \cancel{3} & \cancel{1} & \cancel{2} \\ \cancel{6} & \cancel{4} & \cancel{5} \\ \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{3} \end{bmatrix} \quad (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^6[(3)(4) - (6)(1)] = (-1)^6[12 - 6] = 1[6] = 6$$

La matriz de cofactores es: $A_c = \begin{bmatrix} 7 & -8 & -2 \\ -1 & 5 & -1 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

Paso 3: Obtención de la matriz de cofactores.

Problema resuelto

Obtener la matriz de cofactores de la siguiente matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Respuesta

$$\begin{bmatrix} \cancel{5} & \cancel{5} & \cancel{3} \\ \cancel{5} & 4 & 3 \\ \cancel{3} & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^2[(4)(2) - (2)(3)] = (-1)^2[8 - 6] = 1[2] = 2$$

$$\begin{bmatrix} \cancel{5} & \cancel{5} & \cancel{3} \\ 5 & \cancel{4} & 3 \\ 3 & \cancel{2} & \cancel{2} \end{bmatrix} \quad (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^3[(5)(2) - (3)(3)] = (-1)^3[10 - 9] = -1[1] = -1$$

$$\begin{bmatrix} \cancel{5} & \cancel{5} & \cancel{3} \\ 5 & 4 & \cancel{3} \\ 3 & 2 & \cancel{2} \end{bmatrix} \quad (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^4[(5)(2) - (3)(4)] = (-1)^4[10 - 12] = 1[-2] = -2$$

Alerta

Al calcular una matriz de cofactores de orden 3×3 se obtiene una matriz del mismo orden pero de cofactores.

Respuesta (*continuación*)

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^3[(5)(2)-(2)(3)] = (-1)^3[10-6] = -1[4] = -4$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^4[(5)(2)-(3)(3)] = (-1)^4[10-9] = 1[1] = 1$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^5[(5)(2)-(3)(5)] = (-1)^5[10-15] = -1[-5] = 5$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^4[(5)(3)-(4)(3)] = (-1)^4[15-12] = 1[3] = 3$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^5[(5)(3)-(5)(3)] = (-1)^5[15-15] = -1[0] = 0$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^6[(5)(4)-(5)(5)] = (-1)^6[20-25] = 1[-5] = -5$$

La matriz de cofactores es: $A_c = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -4 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

Problema resuelto

Obtener la matriz de cofactores de la siguiente matriz $A = \begin{bmatrix} -5 & -1 & -4 \\ 1 & -3 & -2 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

Respuesta

$$\begin{bmatrix} -5 & -1 & -4 \\ 1 & -3 & -2 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix} \quad (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = (-1)^2[(-3)(-3)-(3)(-2)] = (-1)^2[9+6] = 1[15] = 15$$

$$\begin{bmatrix} -5 & -1 & -4 \\ 1 & -3 & -2 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix} \quad (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = (-1)^3[(1)(-3)-(-2)(-2)] = (-1)^3[-3-4] = -1[-7] = 7$$

$$\begin{bmatrix} -5 & -1 & -4 \\ 1 & -3 & -2 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix} \quad (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^4[(1)(3)-(-2)(-3)] = (-1)^4[3-6] = 1[-3] = -3$$

$$\begin{bmatrix} -5 & -1 & -4 \\ 1 & -3 & -2 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix} \quad (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = (-1)^3[(-1)(-3)-(3)(-4)] = (-1)^3[3+12] = -1[15] = -15$$

Respuesta (*continuación*)

$$\begin{bmatrix} -5 & -1 & -4 \\ 1 & -3 & -2 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix} (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -5 & -4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = (-1)^4[(-5)(-3) - (-2)(-4)] = (-1)^4[15 - 8] = 1[7] = 7$$

$$\begin{bmatrix} -5 & -1 & -4 \\ 1 & -3 & -2 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix} (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^5[(-5)(3) - (-2)(-1)] = (-1)^5[-15 - 2] = -1[-17] = 17$$

$$\begin{bmatrix} -5 & -1 & -4 \\ 1 & -3 & -2 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix} (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^4[(-1)(-2) - (-3)(-4)] = (-1)^4[2 - 12] = 1[-10] = -10$$

$$\begin{bmatrix} -5 & -1 & -4 \\ 1 & -3 & -2 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix} (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -5 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^5[(-5)(-2) - (1)(-4)] = (-1)^5[10 + 4] = -1[14] = -14$$

$$\begin{bmatrix} -5 & -1 & -4 \\ 1 & -3 & -2 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix} (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = (-1)^6[(-5)(-3) - (1)(-1)] = (-1)^6[15 + 1] = 1[16] = 16$$

La matriz de cofactores es: $A_c = \begin{bmatrix} 15 & 7 & -3 \\ -15 & 7 & 17 \\ -10 & -14 & 16 \end{bmatrix}$

Problema resuelto

Obtener la matriz de cofactores de la siguiente matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

Respuesta

$$\begin{bmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{bmatrix} (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = (-1)^2[(5)(8) - (1)(3)] = (-1)^2[40 - 3] = 1[37] = 37$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{bmatrix} (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = (-1)^3[(7)(8) - (6)(3)] = (-1)^3[56 - 18] = -1[38] = -38$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{bmatrix} (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^4[(7)(1) - (6)(5)] = (-1)^4[7 - 30] = 1[-23] = -23$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{bmatrix} (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = (-1)^3[(9)(8) - (1)(4)] = (-1)^3[72 - 4] = -1[68] = -68$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{bmatrix} (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = (-1)^4[(2)(8) - (6)(4)] = (-1)^4[16 - 24] = 1[-8] = -8$$

Respuesta (*continuación*)

$$\begin{bmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{bmatrix} \quad (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^5[(2)(1)-(6)(9)] = (-1)^5[2-54] = -1[-52] = 52$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{bmatrix} \quad (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^4[(9)(3)-(5)(4)] = (-1)^4[27-20] = 1[7] = 7$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{bmatrix} \quad (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^5[(2)(3)-(7)(4)] = (-1)^5[6-28] = -1[-22] = 22$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{bmatrix} \quad (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^6[(2)(5)-(7)(9)] = (-1)^6[10-63] = 1[-53] = -53$$

La matriz de cofactores es: $A_c = \begin{bmatrix} 37 & -38 & -23 \\ -68 & -8 & 52 \\ 7 & 22 & -53 \end{bmatrix}$

Alerta

La inversa de una matriz se identifica al tener un exponente a la menos uno.

6.10 Inversa de una matriz (el empleo de la transposición y los cofactores)

En el álgebra lineal la matriz inversa es considerada una de las de mayor importancia, por las distintas aplicaciones que tiene, identificada la matriz inversa o recíproca por A^{-1}.

Una forma fácil de obtener la inversa de una matriz, es por medio del empleo del determinante de la matriz original y el empleo de la matriz de cofactores pero transpuesta.

Para obtener la matriz inversa A^{-1} a partir de una matriz A se recomiendan los siguientes pasos:

Paso 1: Obtener el determinante de la matriz

Se obtiene el determinante de la matriz al calcular la diferencia de multiplicar las diagonales principales por las diagonales secundarias.

Recuerda que el determinante de una matriz se obtiene:

Matriz de (2×2) $\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = [(a_{11})(a_{22}) - (a_{21})(a_{12})]$

Matriz de (3×3) $\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$

$$[(a_{11})(a_{22})(a_{33}) + (a_{12})(a_{23})(a_{31}) + (a_{13})(a_{21})(a_{32})] - [(a_{31})(a_{22})(a_{13}) + (a_{32})(a_{23})(a_{11}) + (a_{33})(a_{21})(a_{12})]$$

Expresándose el determinante de la matriz A como $|A|$ siempre y cuando su determinante sea no nulo, es decir, sea distinto de cero ya que para que A tenga inversa es condición necesaria que $|A| \neq 0$

Paso 2: Obtener la matriz de cofactores

Se emplea la matriz original para obtener la matriz de cofactores

Paso 3: Transponer la matriz de cofactores y dividirla entre su determinante

La matriz de cofactores transpuesta se divide entre el determinante de la matriz, y como solución se obtiene la matriz inversa o recíproca.

Paso 4: Obtención de la inversa de la matriz

La matriz resultante se conoce como matriz inversa o recíproca.

Problema resuelto

Obtener la inversa de la siguiente matriz $A = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Respuesta

Se calcula el determinante de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Paso 1: Obtener el determinante de la matriz.

$$|A| = |(7)(2) - (1)(5)| = 14 - 5 = |9|$$

Se obtiene la matriz de cofactores

$$\begin{bmatrix} \cancel{7} & \cancel{5} \\ \cancel{1} & 2 \end{bmatrix}$$

Paso 2: Obtener la matriz de cofactores; *al ser una matriz de 2 × 2, la matriz de cofactores contendrá 4 términos.*

El cofactor es: $(-1)^{1+1}(2)$

$(-1)^2(2) = (1)(2) = 2$

$$\begin{bmatrix} \cancel{7} & \cancel{5} \\ \cancel{1} & \cancel{2} \end{bmatrix}$$

El cofactor es: $(-1)^{1+2}(1)$

$(-1)^3(1) = (-1)(1) = -1$

$$\begin{bmatrix} \cancel{7} & \cancel{5} \\ \cancel{1} & \cancel{2} \end{bmatrix}$$

El cofactor es: $(-1)^{2+1}(5)$

$(-1)^3(5) = (-1)(5) = -5$

$$\begin{bmatrix} \cancel{7} & \cancel{5} \\ \cancel{1} & \cancel{2} \end{bmatrix}$$

El cofactor es: $(-1)^{2+2}(7)$

$(-1)^4(7) = (1)(7) = 7$

La matriz de cofactores es: $A_c = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$

Paso 3: Transponer la matriz de cofactores y dividirla entre su determinante.

Se transpone la matriz de cofactores y se divide:

Paso 4: Obtención de la inversa de la matriz.

$$\frac{A_c{}^t = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}}{|A| = \quad |9|} = A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & \frac{-5}{9} \\ \frac{-1}{9} & \frac{7}{9} \end{bmatrix}$$

Problema resuelto

Obtener la inversa de la siguiente matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

Respuesta

Se calcula el determinante de la matriz

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

Paso 1: Obtener el determinante de la matriz.

$|A| = |(2)(2) - (3)(1)| = 4 - 3 = |1|$

Se obtiene la matriz de cofactores

Paso 2: Obtener la matriz de cofactores; *al ser una matriz de 2 × 2, la matriz de cofactores contendrá 4 términos.*

$\begin{bmatrix} \not{2} & \not{1} \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

El cofactor es: $(-1)^{1+1}(2)$

$(-1)^2(2) = (1)(2) = 2$

$\begin{bmatrix} \not{2} & \not{1} \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

El cofactor es: $(-1)^{1+2}(3)$

$(-1)^3(3) = (-1)(3) = -3$

$\begin{bmatrix} \not{2} & 1 \\ \not{3} & 2 \end{bmatrix}$

El cofactor es: $(-1)^{2+1}(1)$

$(-1)^3(1) = (-1)(1) = -1$

$\begin{bmatrix} 2 & \not{1} \\ \not{3} & \not{2} \end{bmatrix}$

El cofactor es: $(-1)^{2+2}(2)$

$(-1)^4(2) = (1)(2) = 2$

La matriz de cofactores es: $A_c = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Paso 3: Transponer la matriz de cofactores y dividirla entre su determinante.

Se transpone la matriz de cofactores y se divide:

Paso 4: Obtención de la inversa de la matriz.

$$\frac{A_c{}^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}}{|A| = \quad |1|} = A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Problema resuelto

Obtener la inversa de la siguiente matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

Respuesta

Se calcula el determinante de la matriz

$A = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$

Paso 1: Obtener el determinante de la matriz.

$|A| = |(2)(5) - (3)(4)| = 10 - 12 = |-2|$

Respuesta (*continuación*)

Se obtiene la matriz de cofactores

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

El cofactor es: $(-1)^{1+1}(5)$

$$(-1)^2(5) = (1)(5) = 5$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

El cofactor es: $(-1)^{1+2}(3)$

$$(-1)^3(3) = (-1)(3) = -3$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

El cofactor es: $(-1)^{2+1}(4)$

$$(-1)^3(4) = (-1)(4) = -4$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

El cofactor es: $(-1)^{2+2}(2)$

$$(-1)^4(2) = (1)(2) = 2$$

Paso 2: Obtener la matriz de cofactores; *al ser una matriz de 2 × 2, la matriz de cofactores contendrá 4 términos.*

La matriz de cofactores es: $A_c = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

Paso 3: Transponer la matriz de cofactores y dividirla entre su determinante.

Se transpone la matriz de cofactores y se divide:

Paso 4: Obtención de la inversa de la matriz.

$$\frac{A_c{}^t = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}}{|A| = |-2|} = A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{-2} & \frac{-4}{-2} \\ \frac{-3}{-2} & \frac{2}{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-5}{2} & 2 \\ \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

Problema resuelto

Obtener la inversa de la siguiente matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Respuesta

Se calcula el determinante de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad |A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 1 \\ 6 & 4 \\ 2 & 1 \end{matrix}$$

Paso 1: Obtener el determinante de la matriz.

$$\big[(3)(4)(3) + (1)(5)(2) + (2)(6)(1)\big] - \big[(2)(4)(2) + (1)(5)(3) + (3)(6)(1)\big] =$$

$$\big[(36) + (10) + (12)\big] - \big[(16) + (15) + (18)\big] = \big[(58) - (49)\big] = |9|$$

Se obtiene la matriz de cofactores

Paso 2: Obtener la matriz de cofactores; *al ser una matriz de 3 × 3, la matriz de cofactores contendrá 9 términos.*

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^2\big[(4)(3) - (1)(5)\big] = (-1)^2\big[12 - 5\big] = 1\big[7\big] = 7$$

Respuesta (*continuación*)

$$\begin{bmatrix} \cancel{3} & \cancel{1} & \cancel{2} \\ \cancel{6} & 4 & 5 \\ \cancel{2} & 1 & 3 \end{bmatrix} (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^3[(6)(3) - (2)(5)] = (-1)^3[18 - 10] = -1[8] = -8$$

$$\begin{bmatrix} \cancel{3} & \cancel{1} & \cancel{2} \\ \cancel{6} & 4 & 5 \\ \cancel{2} & 1 & 3 \end{bmatrix} (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^4[(6)(1) - (2)(4)] = (-1)^4[6 - 8] = 1[-2] = -2$$

$$\begin{bmatrix} \cancel{3} & 1 & 2 \\ \cancel{6} & 4 & 5 \\ \cancel{2} & 1 & 3 \end{bmatrix} (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^3[(1)(3) - (1)(2)] = (-1)^3[3 - 2] = -1[1] = -1$$

$$\begin{bmatrix} 3 & \cancel{1} & 2 \\ \cancel{6} & \cancel{4} & \cancel{5} \\ 2 & \cancel{1} & 3 \end{bmatrix} (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^4[(3)(3) - (2)(2)] = (-1)^4[9 - 4] = 1[5] = 5$$

$$\begin{bmatrix} 3 & \cancel{1} & \cancel{2} \\ \cancel{6} & \cancel{4} & \cancel{5} \\ 2 & \cancel{1} & \cancel{3} \end{bmatrix} (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^5[(3)(1) - (2)(1)] = (-1)^5[3 - 2] = -1[1] = -1$$

$$\begin{bmatrix} \cancel{3} & 1 & 2 \\ \cancel{6} & 4 & 5 \\ \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{3} \end{bmatrix} (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^4[(1)(5) - (4)(2)] = (-1)^4[5 - 8] = 1[-3] = -3$$

$$\begin{bmatrix} \cancel{3} & \cancel{1} & \cancel{2} \\ \cancel{6} & 4 & 5 \\ \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{3} \end{bmatrix} (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^5[(3)(5) - (6)(2)] = (-1)^5[15 - 12] = -1[3] = -3$$

$$\begin{bmatrix} \cancel{3} & \cancel{1} & \cancel{2} \\ \cancel{6} & \cancel{4} & \cancel{5} \\ \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{3} \end{bmatrix} (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^6[(3)(4) - (6)(1)] = (-1)^6[12 - 6] = 1[6] = 6$$

La matriz de cofactores es: $A_c = \begin{bmatrix} 7 & -8 & -2 \\ -1 & 5 & -1 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

Paso 3: Transponer la matriz de cofactores y dividirla entre su determinante.

Se transpone la matriz de cofactores y se divide:

Paso 4: Obtención de la inversa de la matriz.

$$\frac{A_c{}^t = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -3 \\ -8 & 5 & -3 \\ -2 & -1 & 6 \end{bmatrix}}{|A| = \quad |9|} = A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{7}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{-3}{9} \\ \frac{-8}{9} & \frac{5}{9} & \frac{-3}{9} \\ \frac{-2}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{6}{9} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{7}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-8}{9} & \frac{5}{9} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-2}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{2}{3} \end{vmatrix}$$

Respuesta (*continuación*)

Aquí puedes observar que A^{-1} es la matriz inversa o recíproca de A, la cual resulta fácil de comprobar ya que al multiplicar la matriz original por su inversa deberá obtenerse la matriz identidad.

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \frac{7}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-8}{9} & \frac{5}{9} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-2}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3\left(\frac{7}{9}\right)+1\left(\frac{-8}{9}\right)+2\left(\frac{-2}{9}\right) & 3\left(\frac{-1}{9}\right)+1\left(\frac{5}{9}\right)+2\left(\frac{-1}{9}\right) & 3\left(\frac{-1}{3}\right)+1\left(\frac{-1}{3}\right)+2\left(\frac{2}{3}\right) \\ 6\left(\frac{7}{9}\right)+4\left(\frac{-8}{9}\right)+5\left(\frac{-2}{9}\right) & 6\left(\frac{-1}{9}\right)+4\left(\frac{5}{9}\right)+5\left(\frac{-1}{9}\right) & 6\left(\frac{-1}{3}\right)+4\left(\frac{-1}{3}\right)+5\left(\frac{2}{3}\right) \\ 2\left(\frac{7}{9}\right)+1\left(\frac{-8}{9}\right)+3\left(\frac{-2}{9}\right) & 2\left(\frac{-1}{9}\right)+1\left(\frac{5}{9}\right)+3\left(\frac{-1}{9}\right) & 2\left(\frac{-1}{3}\right)+1\left(\frac{-1}{3}\right)+3\left(\frac{2}{3}\right) \end{bmatrix}$$

Problema resuelto

Obtener la inversa de la siguiente matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Respuesta

Se calcula el determinante de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad |A| = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 5 & 5 \\ 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{matrix}$$

$$\big[(5)(4)(2)+(5)(3)(3)+(3)(5)(2)\big]-\big[(3)(4)(3)+(2)(3)(5)+(2)(5)(5)\big]=$$
$$\big[(40)+(45)+(30)\big]-\big[(36)+(30)+(50)\big]=\big[(115)-(116)\big]=|-1|$$

Se obtiene la matriz de cofactores

$$\begin{bmatrix} \cancel{5} & \cancel{5} & \cancel{3} \\ \cancel{5} & 4 & 3 \\ \cancel{3} & 2 & 2 \end{bmatrix} (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^2\big[(4)(2)-(2)(3)\big]=(-1)^2\big[8-6\big]=1\big[2\big]=2$$

$$\begin{bmatrix} 5 & \cancel{5} & 3 \\ 5 & \cancel{4} & 3 \\ 3 & \cancel{2} & 2 \end{bmatrix} (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^3\big[(5)(2)-(3)(3)\big]=(-1)^3\big[10-9\big]=-1\big[1\big]=-1$$

$$\begin{bmatrix} \cancel{5} & \cancel{5} & \cancel{3} \\ 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^4\big[(5)(2)-(3)(4)\big]=(-1)^4\big[10-12\big]=1\big[-2\big]=-2$$

$$\begin{bmatrix} \cancel{5} & 5 & 3 \\ \cancel{5} & 4 & 3 \\ \cancel{3} & 2 & 2 \end{bmatrix} (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^3\big[(5)(2)-(2)(3)\big]=(-1)^3\big[10-6\big]=-1\big[4\big]=-4$$

Respuesta (*continuación*)

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^4[(5)(2) - (3)(3)] = (-1)^4[10 - 9] = 1[1] = 1$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^5[(5)(2) - (3)(5)] = (-1)^5[10 - 15] = -1[-5] = 5$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^4[(5)(3) - (4)(3)] = (-1)^4[15 - 12] = 1[3] = 3$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^5[(5)(3) - (5)(3)] = (-1)^5[15 - 15] = -1[0] = 0$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^6[(5)(4) - (5)(5)] = (-1)^6[20 - 25] = 1[-5] = -5$$

La matriz de cofactores es: $A_c = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -4 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

Se transpone la matriz de cofactores y se divide entre su determinante:

$$\frac{A_c{}^t = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & -5 \end{bmatrix}}{|A| = \quad |-1|} = A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{-1} & \frac{-4}{-1} & \frac{3}{-1} \\ \frac{-1}{-1} & \frac{1}{-1} & \frac{0}{-1} \\ \frac{-2}{-1} & \frac{5}{-1} & \frac{-5}{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

Aquí puedes observar que A^{-1} es la matriz inversa o recíproca de A, la cual resulta fácil de comprobar ya que al multiplicar la matriz original por su inversa deberá obtenerse la matriz identidad.

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5(-2) + 5(1) + 3(2) & 5(4) + 5(-1) + 3(-5) & 5(-3) + 5(0) + 3(5) \\ 5(-2) + 4(1) + 3(2) & 5(4) + 4(-1) + 3(-5) & 5(-3) + 4(0) + 3(5) \\ 3(-2) + 2(1) + 2(2) & 3(4) + 2(-1) + 2(-5) & 3(-3) + 2(0) + 2(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Problema resuelto

Obtener la inversa de la siguiente matriz $A = \begin{bmatrix} -5 & -1 & -4 \\ 1 & -3 & -2 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

Respuesta

Se calcula el determinante de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -1 & -4 \\ 1 & -3 & -2 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix} \qquad |A| = \begin{vmatrix} -5 & -1 & -4 \\ 1 & -3 & -2 \\ -2 & 3 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} -5 & -1 \\ 1 & -3 \\ -2 & 3 \end{matrix}$$

$$[(-5)(-3)(-3) + (-1)(-2)(-2) + (-4)(1)(3)] - [(-2)(-3)(-4) + (3)(-2)(-5) + (-3)(1)(-1)]$$

$$[(-45) + (-4) + (-12)] - [(-24) + (30) + (3)] = [(-61) - (9)] = |-70|$$

Se obtiene la matriz de cofactores

$$\begin{bmatrix} \cancel{-5} & \cancel{-1} & \cancel{-4} \\ \cancel{1} & -3 & -2 \\ \cancel{-2} & 3 & -3 \end{bmatrix} (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = (-1)^2[(-3)(-3) - (3)(-2)] = (-1)^2[9 + 6] = 1[15] = 15$$

$$\begin{bmatrix} \cancel{-5} & \cancel{-1} & \cancel{-4} \\ \cancel{1} & -3 & -2 \\ \cancel{-2} & 3 & -3 \end{bmatrix} (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = (-1)^3[(1)(-3) - (-2)(-2)] = (-1)^3[-3 - 4] = -1[-7] = 7$$

$$\begin{bmatrix} \cancel{-5} & \cancel{-1} & \cancel{-4} \\ \cancel{1} & -3 & -2 \\ \cancel{-2} & 3 & -3 \end{bmatrix} (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^4[(1)(3) - (-2)(-3)] = (-1)^4[3 - 6] = 1[-3] = -3$$

$$\begin{bmatrix} -5 & -1 & -4 \\ \cancel{1} & \cancel{-3} & \cancel{-2} \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix} (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = (-1)^3[(-1)(-3) - (3)(-4)] = (-1)^3[3 + 12] = -1[15] = -15$$

$$\begin{bmatrix} -5 & \cancel{-1} & -4 \\ \cancel{1} & \cancel{-3} & \cancel{-2} \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix} (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -5 & -4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = (-1)^4[(-5)(-3) - (-2)(-4)] = (-1)^4[15 - 8] = 1[7] = 7$$

$$\begin{bmatrix} -5 & -1 & -4 \\ \cancel{1} & \cancel{-3} & \cancel{-2} \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix} (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^5[(-5)(3) - (-2)(-1)] = (-1)^5[-15 - 2] = -1[-17] = 17$$

$$\begin{bmatrix} -5 & -1 & -4 \\ 1 & -3 & -2 \\ \cancel{-2} & \cancel{3} & \cancel{-3} \end{bmatrix} (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^4[(-1)(-2) - (-3)(-4)] = (-1)^4[2 - 12] = 1[-10] = -10$$

$$\begin{bmatrix} -5 & \cancel{-1} & -4 \\ 1 & \cancel{-3} & -2 \\ \cancel{-2} & \cancel{3} & \cancel{-3} \end{bmatrix} (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -5 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^5[(-5)(-2) - (1)(-4)] = (-1)^5[10 + 4] = -1[14] = -14$$

$$\begin{bmatrix} -5 & -1 & -4 \\ 1 & -3 & -2 \\ \cancel{-2} & \cancel{3} & \cancel{-3} \end{bmatrix} (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = (-1)^6[(-5)(-3) - (1)(-1)] = (-1)^6[15 + 1] = 1[16] = 16$$

La matriz de cofactores es: $A_c = \begin{bmatrix} 15 & 7 & -3 \\ -15 & 7 & 17 \\ -10 & -14 & 16 \end{bmatrix}$

Respuesta (*continuación*)

Se transpone la matriz de cofactores y se divide entre su determinante:

$$\frac{A_c{}^t = \begin{bmatrix} 15 & -15 & -10 \\ 7 & 7 & -14 \\ -3 & 17 & 16 \end{bmatrix}}{|A| = \quad |-70|} = A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{15}{-70} & \frac{-15}{-70} & \frac{-10}{-70} \\ \frac{7}{-70} & \frac{7}{-70} & \frac{-14}{-70} \\ \frac{-3}{-70} & \frac{17}{-70} & \frac{16}{-70} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{14} & \frac{3}{14} & \frac{1}{7} \\ \frac{-1}{10} & \frac{-1}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{70} & \frac{-17}{70} & \frac{-8}{35} \end{bmatrix}$$

Aquí puedes observar que A^{-1} es la matriz inversa o recíproca de A, la cual resulta fácil de comprobar ya que al multiplicar la matriz original por su inversa deberá obtenerse la matriz identidad.

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & -1 & -4 \\ 1 & -3 & -2 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-3}{14} & \frac{3}{14} & \frac{1}{7} \\ \frac{-1}{10} & \frac{-1}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{70} & \frac{-17}{70} & \frac{-8}{35} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -5\left(\frac{-3}{14}\right) - 1\left(\frac{-1}{10}\right) - 4\left(\frac{3}{70}\right) & -5\left(\frac{3}{14}\right) - 1\left(\frac{-1}{10}\right) - 4\left(\frac{-17}{70}\right) & -5\left(\frac{1}{7}\right) - 1\left(\frac{1}{5}\right) - 4\left(\frac{-8}{35}\right) \\ 1\left(\frac{-3}{14}\right) - 3\left(\frac{-1}{10}\right) - 2\left(\frac{3}{70}\right) & 1\left(\frac{3}{14}\right) - 3\left(\frac{-1}{10}\right) - 2\left(\frac{-17}{70}\right) & 1\left(\frac{1}{7}\right) - 3\left(\frac{1}{5}\right) - 2\left(\frac{-8}{35}\right) \\ -2\left(\frac{-3}{14}\right) + 3\left(\frac{-1}{10}\right) - 3\left(\frac{3}{70}\right) & -2\left(\frac{3}{14}\right) + 3\left(\frac{-1}{10}\right) - 3\left(\frac{-17}{70}\right) & -2\left(\frac{1}{7}\right) + 3\left(\frac{1}{5}\right) - 3\left(\frac{-8}{35}\right) \end{bmatrix}$$

Problema resuelto

Obtener la inversa de la siguiente matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

Respuesta

Se calcula el determinante de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{bmatrix} \qquad |A| = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 4 & 2 & 9 \\ 7 & 5 & 3 & 7 & 5 \\ 6 & 1 & 8 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$[(2)(5)(8) + (9)(3)(6) + (4)(7)(1)] - [(6)(5)(4) + (1)(3)(2) + (8)(7)(9)] =$$
$$[(80) + (162) + (28)] - [(120) + (6) + (504)] = [(270) - (630)] = |-360|$$

Se obtiene la matriz de cofactores

$$\begin{bmatrix} \cancel{2} & \cancel{9} & \cancel{4} \\ \cancel{7} & 5 & 3 \\ \cancel{6} & 1 & 8 \end{bmatrix} (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = (-1)^2[(5)(8) - (1)(3)] = (-1)^2[40 - 3] = 1[37] = 37$$

Respuesta (*continuación*)

$$\begin{bmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{bmatrix} (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = (-1)^3[(7)(8) - (6)(3)] = (-1)^3[56 - 18] = -1[38] = -38$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{bmatrix} (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^4[(7)(1) - (6)(5)] = (-1)^4[7 - 30] = 1[-23] = -23$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{bmatrix} (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = (-1)^3[(9)(8) - (1)(4)] = (-1)^3[72 - 4] = -1[68] = -68$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{bmatrix} (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = (-1)^4[(2)(8) - (6)(4)] = (-1)^4[16 - 24] = 1[-8] = -8$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{bmatrix} (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^5[(2)(1) - (6)(9)] = (-1)^5[2 - 54] = -1[-52] = 52$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{bmatrix} (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^4[(9)(3) - (5)(4)] = (-1)^4[27 - 20] = 1[7] = 7$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{bmatrix} (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^5[(2)(3) - (7)(4)] = (-1)^5[6-28] = -1[-22] = 22$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{bmatrix} (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^6[(2)(5) - (7)(9)] = (-1)^6[10 - 63] = 1[-53] = -53$$

La matriz de cofactores es: $A_c = \begin{bmatrix} 37 & -38 & -23 \\ -68 & -8 & 52 \\ 7 & 22 & -53 \end{bmatrix}$

Se transpone la matriz de cofactores y se divide entre su determinante:

$$\frac{A_c{}^t = \begin{bmatrix} 37 & -68 & 7 \\ -38 & -8 & 22 \\ -23 & 52 & -53 \end{bmatrix}}{|A| = |-360|} = A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{37}{-360} & \frac{-68}{-360} & \frac{7}{-360} \\ \frac{-38}{-360} & \frac{-8}{-360} & \frac{22}{-360} \\ \frac{-23}{-360} & \frac{52}{-360} & \frac{-53}{-360} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-37}{360} & \frac{17}{90} & \frac{-7}{360} \\ \frac{19}{180} & \frac{1}{45} & \frac{-11}{180} \\ \frac{23}{360} & \frac{-13}{90} & \frac{53}{360} \end{bmatrix}$$

Aquí puedes observar que A^{-1} es la matriz inversa o recíproca de A, la cual resulta fácil de comprobar ya que al multiplicar la matriz original por su inversa deberá obtenerse la matriz identidad.

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-37}{360} & \frac{17}{90} & \frac{-7}{360} \\ \frac{19}{180} & \frac{1}{45} & \frac{-11}{180} \\ \frac{23}{360} & \frac{-13}{90} & \frac{53}{360} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Existe otro método para determinar la inversa de una matriz, llamado Gauss-Jordan, el cual consiste en transformar una matriz A de orden $m \times m$ en una matriz A^{-1} del mismo orden, empleando una matriz identidad adjunta donde a través de operaciones básicas (división, multiplicación, suma y resta), se obtendrá la solución de la misma.

El método de Gauss-Jordan, además de obtener la inversa de una matriz, también puede dar solución a sistemas de ecuaciones.

6.11 Método de Gauss-Jordan

Es un procedimiento de eliminación que se transforma mediante operaciones aplicadas de renglones y columnas, en una matriz inversa equivalente A^{-1}.

Para resolver la inversa de una matriz por el método de Gauss-Jordan se requiere una matriz cuadrada y adjuntarle una matriz identidad.

Tener una matriz cuadrada (2 × 2) (3 × 3)

Para obtener la matriz inversa A^{-1} por el método de Gauss-Jordan de una matriz A se recomiendan los siguientes pasos:

Paso 1: Obtención de la unidad (valor pivote)

Alerta

Los términos 1 de la matriz identidad ubicarán el término pivote en la matriz original.

Se toma como referencia el primer **1** de la matriz identidad para saber qué término de la matriz a resolver es el que será tomado como valor pivote, y que se utilizará para dividir toda la fila.

Aquí el valor pivote es el ▲ y para transformar la fila todo se divide entre el triángulo

En este otro, el valor pivote es ■; aquí, para transformar la fila, todo se divide entre el cuadrado

Paso 2: Obtención del o los ceros de columna (valor o valores semipivotes)

Alerta

Los términos 0 de la matriz identidad ubicarán en la matriz original los términos semipivote.

El resultado obtenido de la división, se utiliza para multiplicar por el o los valores semipivotes (término superior o inferior de columna), pero siempre con signo contrario, sumándole después los valores de la fila correspondiente, para obtener el o los ceros de columna.

Aquí el valor semipivote es el rombo ◆; recuerda, se busca el valor de columna para multiplicarse con signo contrario.

Aquí son dos los semipivotes, son dos los valores de columna: la cruz ✚ y el triángulo ▲; aquí se multiplicarán con signo contrario y después se sumará.

Paso 3: Integración de la nueva matriz

Los renglones obtenidos tanto de la división **(valor pivote)** como de la multiplicación **(valor semipivote)** presentados en un correspondiente orden, integrarán la nueva matriz, la cual utilizaremos para repetir el proceso de solución con el siguiente **1** de la matriz identidad, hasta que la identidad se ubique a la izquierda tomando el lugar de la matriz original, en cuyo caso el ejercicio habrá concluido.

Problema resuelto

Aplicar el procedimiento de Gauss-Jordan y obtener la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Respuesta

$$\begin{array}{cc|cc} 7 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}$$

Paso 1: Obtención de la unidad (valor pivote); el primer 1 de la matriz identidad, indicará el valor a tomarse como valor pivote para dividirse.

$$\frac{7 \quad 5 \quad 1 \quad 0}{7} = 1 \quad \frac{5}{7} \quad \frac{1}{7} \quad 0$$

Paso 2: Obtención del cero o los ceros de columna (valores semipivotes)

$$\begin{array}{cccc} 1 & \frac{5}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ x & -1 & & \\ \hline -1 & \frac{-5}{7} & \frac{-1}{7} & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & \frac{9}{7} & \frac{-1}{7} & 1 \end{array}$$

Paso 3: Integración de la nueva matriz y repetición del proceso.

$$\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & \frac{9}{7} & \frac{-1}{7} & 1 \end{array}$$

Paso 1: Obtención de la unidad (valor pivote); el siguiente 1 de la matriz identidad, indicará el valor a tomarse como valor pivote para dividirse.

$$\frac{0 \quad \frac{9}{7} \quad \frac{-1}{7} \quad 1}{\frac{9}{7}} = 0 \quad 1 \quad \frac{-1}{9} \quad \frac{7}{9}$$

Paso 2: Obtención del cero o los ceros de columna (valores semipivotes)

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \frac{-1}{9} & \frac{7}{9} \\ x & \frac{-5}{7} & & \\ \hline 0 & \frac{-5}{7} & \frac{5}{63} & \frac{-5}{9} \\ 1 & \frac{5}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ \hline 1 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{-5}{9} \end{array}$$

Paso 3: Integración de la nueva matriz y repetición del proceso, como aquí la matriz identidad ya se ubica a la izquierda, el ejercicio terminó.

$$\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{-5}{9} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{9} & \frac{7}{9} \end{array}$$

Como se observa, al aplicar la solución por el método de Gauss-Jordan, se obtiene también la inversa de una matriz, lo importante es ubicar:

- El valor pivote (término que se utiliza para dividir la fila, buscando la unidad).
- El o los valores semipivotes (término utilizado para multiplicar la columna, buscando el o los ceros de columna).

Alerta

En Gauss-Jordan se adjunta una matriz identidad del mismo orden que la original.

Problema resuelto

Aplicar el procedimiento de Gauss-Jordan y obtener la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

Respuesta

$$\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}$$

Paso 1: Obtención de la unidad (valor pivote); el primer 1 de la matriz identidad, indicará el valor a tomarse como valor pivote para dividirse.

$$\frac{2 \quad 1 \quad 1 \quad 0}{2} = 1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad 0$$

Paso 2: Obtención del cero o los ceros de columna (valores semipivotes)

$$\begin{array}{cccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ x & -3 & & \\ \hline -3 & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} & 1 \end{array}$$

Paso 3: Integración de la nueva matriz y repetición del proceso.

$$\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} & 1 \end{array}$$

Paso 1: Obtención de la unidad (valor pivote); el siguiente 1 de la matriz identidad, indicará el valor a tomarse como valor pivote para dividirse.

$$\frac{0 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{-3}{2} \quad 1}{\frac{1}{2}} = 0 \quad 1 \quad -3 \quad 2$$

Paso 2: Obtención del cero o los ceros de columna (valores semipivotes)

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & -3 & 2 \\ x & \frac{-1}{2} & & \\ \hline 0 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline 1 & 0 & 2 & -1 \end{array}$$

Paso 3: Integración de la nueva matriz y repetición del proceso; como aquí la matriz identidad ya se ubica a la izquierda, el ejercicio terminó.

$$\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}$$

Aquí puedes observar que A^{-1} es la matriz inversa o recíproca de A, la cual resulta fácil de comprobar: al multiplicar la matriz original por su inversa da como resultado la matriz identidad.

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(2)+1(-3) & 2(-1)+1(2) \\ 3(2)+2(-3) & 3(-1)+2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-3 & -2+2 \\ 6-6 & -3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Alerta

En el procedimiento de matriz inversa por Gauss-Jordan se divide entre el término pivote y se multiplica con signo contrario por el o los términos semipivotes.

Problema resuelto

Aplicar el procedimiento de Gauss-Jordan y obtener la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

Respuesta

$$\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}$$

Paso 1: Obtención de la unidad (valor pivote); el primer 1 de la matriz identidad, indicará el valor a tomarse como valor pivote para dividirse.

$$\frac{2 \quad 4 \quad 1 \quad 0}{2} = 1 \quad 2 \quad \frac{1}{2} \quad 0$$

Paso 2: Obtención del cero o los ceros de columna (valores semipivotes)

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ x & -3 & & \\ \hline -3 & -6 & -1\frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -1 & -1\frac{1}{2} & 1 \end{array}$$

Paso 3: Integración de la nueva matriz y repetición del proceso.

$$\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & -1\frac{1}{2} & 1 \end{array}$$

Paso 1: Obtención de la unidad (valor pivote); el siguiente 1 de la matriz identidad, indicará el valor a tomarse como valor pivote para dividirse.

$$\frac{0 \quad -1 \quad -1\frac{1}{2} \quad 1}{-1} = 0 \quad 1 \quad 1\frac{1}{2} \quad -1$$

Paso 2: Obtención del cero o los ceros de columna (valores semipivote)

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1\frac{1}{2} & -1 \\ x & -2 & & \\ \hline 0 & -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline 1 & 0 & -2\frac{1}{2} & 2 \end{array}$$

Paso 3: Integración de la nueva matriz y repetición del proceso; como aquí la matriz identidad ya se ubica a la izquierda, el ejercicio terminó.

$$\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 1\frac{1}{2} & -1 \end{array}$$

Aquí puedes observar que A^{-1} es la matriz inversa o recíproca de A, la cual resulta fácil de comprobar: al multiplicar la matriz original por su inversa da como resultado la matriz identidad.

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2\frac{1}{2} & 2 \\ 1\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\left(-2\frac{1}{2}\right) + 4\left(1\frac{1}{2}\right) & 2(2) + 4(-1) \\ 3\left(-2\frac{1}{2}\right) + 5\left(1\frac{1}{2}\right) & 3(2) + 5(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Problema resuelto

Aplicar el procedimiento de Gauss-Jordan y obtener la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 9 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

Respuesta

$$\begin{array}{cc|cc} -1 & 9 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

Paso 1: Obtención de la unidad (valor pivote); el primer 1 de la matriz identidad, indicará el valor a tomarse como valor pivote para dividirse.

$$\frac{-1 \quad 9 \quad 1 \quad 0}{-1} = 1 \quad -9 \quad -1 \quad 0$$

Paso 2: Obtención del cero o los ceros de columna (valores semipivotes)

$$\begin{array}{cccc} 1 & -9 & -1 & 0 \\ x & -3 & & \\ \hline -3 & 27 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 26 & 3 & 1 \end{array}$$

Paso 3: Integración de la nueva matriz y repetición del proceso.

$$\begin{array}{cc|cc} 1 & -9 & -1 & 0 \\ 0 & 26 & 3 & 1 \end{array}$$

Paso 1: Obtención de la unidad (valor pivote); el siguiente 1 de la matriz identidad, indicará el valor a tomarse como valor pivote para dividirse.

$$\frac{0 \quad 26 \quad 3 \quad 1}{26} = 0 \quad 1 \quad \frac{3}{26} \quad \frac{1}{26}$$

Paso 2: Obtención del cero o los ceros de columna (valores semipivote)

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \frac{3}{26} & \frac{1}{26} \\ x & 9 & & \\ \hline 0 & 9 & 1\frac{1}{26} & \frac{9}{26} \\ 1 & -9 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & \frac{1}{26} & \frac{9}{26} \end{array}$$

Paso 3: Integración de la nueva matriz y repetición del proceso; como aquí la matriz identidad ya se ubica a la izquierda, el ejercicio terminó.

$$\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{26} & \frac{9}{26} \\ 0 & 1 & \frac{3}{26} & \frac{1}{26} \end{array}$$

Aquí puedes observar que A^{-1} es la matriz inversa o recíproca de A, la cual resulta fácil de comprobar: al multiplicar la matriz original por su inversa da como resultado la matriz identidad.

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 9 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{26} & \frac{9}{26} \\ \frac{3}{26} & \frac{1}{26} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1\left(\frac{1}{26}\right) + 9\left(\frac{3}{26}\right) & -1\left(\frac{9}{26}\right) + 9\left(\frac{1}{26}\right) \\ 3\left(\frac{1}{26}\right) - 1\left(\frac{3}{26}\right) & 3\left(\frac{9}{26}\right) - 1\left(\frac{1}{26}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Problema resuelto

Aplicar el procedimiento de Gauss-Jordan y obtener la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$

Respuesta

$$\begin{array}{cc|cc} -3 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 1 \end{array}$$

Paso 1: Obtención de la unidad (valor pivote); el primer 1 de la matriz identidad, indicará el valor a tomarse como valor pivote para dividirse.

$$\frac{-3 \quad -1 \quad 1 \quad 0}{-3} = 1 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{-1}{3} \quad 0$$

Paso 2: Obtención del cero o los ceros de columna (valores semipivotes)

$$\begin{array}{cccc} 1 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ x & 4 & & \\ \hline 4 & 1\frac{1}{3} & -1\frac{1}{3} & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & \frac{-2}{3} & -1\frac{1}{3} & 1 \end{array}$$

Paso 3: Integración de la nueva matriz y repetición del proceso.

$$\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{-2}{3} & -1\frac{1}{3} & 1 \end{array}$$

Paso 1: Obtención de la unidad (valor pivote); el siguiente 1 de la matriz identidad, indicará el valor a tomarse como valor pivote para dividirse.

$$\frac{0 \quad \frac{-2}{3} \quad -1\frac{1}{3} \quad 1}{\frac{-2}{3}} = 0 \quad 1 \quad 2 \quad \frac{-3}{2}$$

Paso 2: Obtención del cero o los ceros de columna (valores semipivotes)

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & -\frac{3}{2} \\ x & \frac{-1}{3} & & \\ \hline 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{array}$$

Paso 3: Integración de la nueva matriz y repetición del proceso; como aquí la matriz identidad ya se ubica a la izquierda, el ejercicio terminó.

$$\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{-3}{2} \end{array}$$

Aquí puedes observar que A^{-1} es la matriz inversa o recíproca de A, la cual resulta fácil de comprobar: al multiplicar la matriz original por su inversa da como resultado la matriz identidad.

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{-3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3(-1) - 1(2) & -3\left(\frac{1}{2}\right) - 1\left(\frac{-3}{2}\right) \\ -4(-1) - 2(2) & -4\left(\frac{1}{2}\right) - 2\left(\frac{-3}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Problema resuelto

Aplicar el procedimiento de Gauss-Jordan y obtener la matriz inversa $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Respuesta

$$\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Paso 1: Obtención de la unidad (valor pivote); el primer 1 de la matriz identidad, indicará el valor a tomarse como valor pivote para emplearse como divisor.

$$\frac{3 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 0}{3} = 1 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{3} \quad 0 \quad 0$$

Paso 2: Obtención del cero o los ceros de columna (valores semipivotes)

$$\begin{array}{cccccc} 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ x & -6 & & & & \\ \hline -6 & -2 & -4 & -2 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ x & -2 & & & & \\ \hline -2 & \frac{-2}{3} & \frac{-4}{3} & \frac{-2}{3} & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{-2}{3} & 0 & 1 \end{array}$$

Paso 3: Integración de la nueva matriz y repetición del proceso.

> **Alerta**
>
> En el procedimiento de matriz inversa por Gauss-Jordan, cuando la matriz es de 3×3 se divide entre el término pivote, pero al ser dos los semipivotes, las multiplicaciones que se realizan son dos.

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{-2}{3} & 0 & 1 \end{array}$$

Paso 1: Obtención de la unidad (valor pivote); el siguiente 1 de la matriz identidad, indicará el valor a tomarse como valor pivote para emplearse como divisor.

$$\frac{0 \quad 2 \quad 1 \quad -2 \quad 1 \quad 0}{2} = 0 \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad -1 \quad \frac{1}{2} \quad 0$$

Paso 2: Obtención del cero o los ceros de columna (valores semipivotes)

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ x & \frac{-1}{3} & & & & \\ \hline 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{6} & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{6} & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ x & \frac{-1}{3} & & & & \\ \hline 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{-2}{3} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{6} & 1 \end{array}$$

Paso 3: Integración de la nueva matriz y repetición del proceso.

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{6} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{6} & 1 \end{array}$$

Paso 1: Obtención de la unidad (valor pivote); el siguiente 1 de la matriz identidad, indicará el valor a tomarse como valor pivote para emplearse como divisor.

$$\frac{0 \quad 0 \quad \frac{3}{2} \quad \frac{-1}{3} \quad \frac{-1}{6} \quad 1}{\frac{3}{2}} = 0 \quad 0 \quad 1 \quad \frac{-2}{9} \quad \frac{-1}{9} \quad \frac{2}{3}$$

Respuesta (*continuación*)

Paso 2: Obtención del cero o los ceros de columna (valores semipivotes)

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{2}{3} \\ x & \frac{-1}{2} & & & & \\ \hline 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{9} & \frac{1}{18} & \frac{-1}{3} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{6} & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & \frac{7}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{-1}{3} \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{2}{3} \\ x & \frac{-1}{2} & & & & \\ \hline 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{9} & \frac{1}{18} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & \frac{-8}{9} & \frac{5}{9} & \frac{-1}{3} \end{array}$$

Paso 3: Integración de la nueva matriz y repetición del proceso; como aquí la matriz identidad ya se ubica a la izquierda, el ejercicio terminó.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-8}{9} & \frac{5}{9} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{2}{3} \end{array}\right]$$

Aquí también A^{-1} es la matriz inversa o recíproca de A; verifícala al multiplicar

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{7}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-8}{9} & \frac{5}{9} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-2}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Problema resuelto

Aplicar el procedimiento de Gauss-Jordan y obtener la matriz inversa $A = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Respuesta

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 5 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Paso 1: Obtención de la unidad (valor pivote); el primer 1 de la matriz identidad, indicará el valor a tomarse como valor pivote para emplearse como divisor.

$$\frac{5 \quad 5 \quad 3 \quad 1 \quad 0 \quad 0}{5} = 1 \quad 1 \quad \frac{3}{5} \quad \frac{1}{5} \quad 0 \quad 0$$

Paso 2: Obtención del cero o los ceros de columna (valores semipivotes)

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ x & -5 & & & & \\ \hline -5 & -5 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ x & -3 & & & & \\ \hline -3 & -3 & -1\frac{4}{5} & \frac{-3}{5} & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -1 & \frac{1}{5} & \frac{-3}{5} & 0 & 1 \end{array}$$

Paso 3: Integración de la nueva matriz y repetición del proceso.

Respuesta (*continuación*)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{5} & \frac{-3}{5} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Paso 1: Obtención de la unidad (valor pivote); el siguiente 1 de la matriz identidad, indicará el valor a tomarse como valor pivote para emplearse como divisor.

$$\frac{0 \quad -1 \quad 0 \quad -1 \quad 1 \quad 0}{-1} = 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad -1 \quad 0$$

Paso 2: Obtención del cero o los ceros de columna (valores Semipivotes)

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ x & -1 & & & & \\ \hline 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ x & 1 & & & & \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{5} & \frac{-3}{5} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -1 & 1 \end{array}$$

Paso 3: Integración de la nueva matriz y repetición del proceso.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Paso 1: Obtención de la unidad (valor pivote); el siguiente 1 de la matriz identidad, indicará el valor a tomarse como valor pivote para emplearse como divisor.

$$\frac{0 \quad 0 \quad \frac{1}{5} \quad \frac{2}{5} \quad -1 \quad 1}{\frac{1}{5}} = 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad -5 \quad 5$$

Paso 2: Obtención del cero o los ceros de columna (valores semipivotes)

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 1 & 2 & -5 & 5 \\ x & \frac{-3}{5} & & & & \\ \hline 0 & 0 & \frac{-3}{5} & \frac{-6}{5} & 3 & -3 \\ 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -2 & 4 & -3 \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 1 & 2 & -5 & 5 \\ x & 0 & & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

Paso 3: Integración de la nueva matriz y repetición del proceso; como aquí la matriz identidad ya se ubica a la izquierda, el ejercicio terminó.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -5 & 5 \end{array}\right]$$

Aquí también A^{-1} es la matriz inversa o recíproca de A; verifícala al multiplicar

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Problema resuelto

Aplicar el procedimiento de Gauss-Jordan y obtener la matriz inversa $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

Respuesta

$$\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Paso 1: Obtención de la unidad (valor pivote); el primer 1 de la matriz identidad, indicará el valor a tomarse como valor pivote para emplearse como divisor.

$$\frac{-2 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad 0 \quad 0}{-2} = 1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad 0 \quad 0$$

Paso 2: Obtención del cero o los ceros de columna (valores semipivotes)

$$\begin{array}{cccccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 & 0 \\ x & 1 & & & & \\ \hline 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 & 0 \\ x & 1 & & & & \\ \hline 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2} & 0 & 1 \end{array}$$

Paso 3: Integración de la nueva matriz y repetición del proceso.

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2} & 0 & 1 \end{array}$$

Paso 1: Obtención de la unidad (valor pivote); el siguiente 1 de la matriz identidad, indicará el valor a tomarse como valor pivote para emplearse como divisor.

$$\frac{0 \quad \frac{-3}{2} \quad \frac{-1}{2} \quad \frac{-1}{2} \quad 1 \quad 0}{\frac{-3}{2}} = 0 \quad 1 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{-2}{3} \quad 0$$

Paso 2: Obtención del cero o los ceros de columna (valores semipivotes)

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & 0 \\ x & \frac{-1}{2} & & & & \\ \hline 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & 0 \\ x & \frac{1}{2} & & & & \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & \frac{-4}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & 1 \end{array}$$

Paso 3: Integración de la nueva matriz y repetición del proceso.

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-4}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & 1 \end{array}$$

Paso 1: Obtención de la unidad (valor pivote); el siguiente 1 de la matriz identidad, indicará el valor a tomarse como valor pivote para emplearse como divisor.

$$\frac{0 \quad 0 \quad \frac{-4}{3} \quad \frac{-1}{3} \quad \frac{-1}{3} \quad 1}{\frac{-4}{3}} = 0 \quad 0 \quad 1 \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{-3}{4}$$

Respuesta (*continuación*)

Paso 2: Obtención del cero o los ceros de columna (valores semipivotes)

0	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{-3}{4}$
x	$\frac{-1}{3}$				
0	0	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-1}{12}$	$\frac{-1}{12}$	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{-2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
1	0	0	$\frac{-3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

0	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{-3}{4}$
x	$\frac{-1}{3}$				
0	0	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-1}{12}$	$\frac{-1}{12}$	$\frac{1}{4}$
0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-2}{3}$	0
0	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{-3}{4}$	$\frac{1}{4}$

Paso 3: Integración de la nueva matriz y repetición del proceso; como aquí la matriz identidad ya se ubica a la izquierda, el ejercicio terminó.

1	0	0	$\frac{-3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
0	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{-3}{4}$	$\frac{1}{4}$
0	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{-3}{4}$

El método de Gauss-Jordan también puede dar solución a sistemas de ecuaciones, para hacerlo la recomendación es anexar otra columna a la solución donde se ubiquen los valores independientes; véase lo siguiente.

6.12 Método de Gauss-Jordan (soluciones de sistemas de ecuaciones)

ALERTA: En la unidad 1 se planteó el siguiente problema y se le dio solución aplicando distintos métodos de solución; aquí aplicaremos el método de Gauss-Jordan.

Alerta

Gauss-Jordan puede emplearse para dar solución a un sistema de ecuaciones simultáneas.

Carmen fue al mercado y en la mañana compro 2 kilos de tortillas y 1 pollo, pago $86.00; llegan visitas de sorpresa, por lo que regresa a comprar 3 kilos de tortillas y 2 pollos pagando en esta ocasión $160.00; al llegar a su casa se pregunta cuánto costaba el pollo.

$$\textit{Sistema de ecuaciones} \begin{cases} 2x + y = 86 \\ 3x + 2y = 160 \end{cases}$$

2	1	1	0	$86
3	2	0	1	$160

Paso 1: Obtención de la unidad (valor pivote); el primer 1 de la matriz identidad, indicará el valor a tomarse como valor pivote para dividirse.

2	1	1	0	$86	=	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	43
		2								

Paso 2: Obtención del cero o los ceros de columna (valores semipivotes)

1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	43
x	-3			
-3	$-1\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$	0	-129
3	2	0	1	160
0	$\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$	1	31

1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$43
0	$\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$	1	$31

Paso 3: Integración de la nueva matriz y repetición del proceso.

Paso 1: Obtención de la unidad (valor pivote); el siguiente 1 de la matriz identidad, indicará el valor a tomarse como valor pivote para dividirse.

$$\frac{0 \quad \frac{1}{2} \quad -1\frac{1}{2} \quad 1 \quad \$31}{\frac{1}{2}} = 0 \quad 1 \quad -3 \quad 2 \quad 62$$

Paso 2: Obtención del cero o los ceros de columna (valores semipivotes)

0	1	−3	2	62
x	$\frac{-1}{2}$			
0	$\frac{-1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	−1	−31
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	43
1	0	2	−1	12

Paso 3: Integración de la nueva matriz y repetición del proceso; como aquí la matriz identidad ya se ubica a la izquierda, el ejercicio terminó.

1	0	2	−1	$12
0	1	−3	2	$62

Tal y como resultó en la unidad 1, la solución para Carmen fue que el kilo de tortillas costó $12.00 y cada pollo $62.00.

Problema resuelto

Utilizar Gauss-Jordan para obtener el valor de las variables del sistema de ecuaciones.

$$\textit{Sistema de ecuaciones} \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x + y = 10 \end{cases}$$

Respuesta

2	−3	1	0	5
1	1	0	1	10

Paso 1: Obtención de la unidad (valor pivote); el primer 1 de la matriz identidad, indicará el valor a tomarse como valor pivote para dividirse.

$$\frac{2 \quad -3 \quad 1 \quad 0 \quad 5}{2} = 1 \quad -1\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad 2\frac{1}{2}$$

Paso 2: Obtención del cero o los ceros de columna (valores semipivotes)

1	$-1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$2\frac{1}{2}$
x	−1			
−1	$1\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	0	$-2\frac{1}{2}$
1	1	0	1	10
0	$2\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	1	$7\frac{1}{2}$

Respuesta (*continuación*)

Paso 3: Integración de la nueva matriz y repetición del proceso.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & -1\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 2.5 \\ 0 & 2\frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 7.5 \end{array}$$

Paso 1: Obtención de la unidad (valor pivote); el siguiente 1 de la matriz identidad, indicará el valor a tomarse como valor pivote para dividirse.

$$\frac{\begin{array}{ccccc} 0 & 2\frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 7.5 \end{array}}{2\frac{1}{2}} = \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} & 3 \end{array}$$

Paso 2: Obtención del cero o los ceros de columna (valores semipivotes)

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} & 3 \\ x & 1\frac{1}{2} & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 1\frac{1}{2} & \frac{-3}{10} & \frac{3}{5} & 4\frac{1}{2} \\ 1 & -1\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 2\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 7 \end{array}$$

Paso 3: Integración de la nueva matriz y repetición del proceso; como aquí la matriz identidad ya se ubica a la izquierda, el ejercicio terminó.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 7 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} & 3 \end{array}$$

Los resultados de las incógnitas se ubicarán en la columna que fue agregada y siempre se encontrarán en el orden en que se presentan las ecuaciones, pudiéndose comprobar al sustituir los valores en cualquiera de las ecuaciones del sistema.

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 5 \\ 2(7) - 3(3) &= 5 \\ 14 - 9 &= 5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y &= 10 \\ (7) + (3) &= 10 \\ 7 + 3 &= 10 \end{aligned}$$

Comprobado, los resultados son correctos

Al multiplicar la matriz de datos por la inversa se puede comprobar que la inversa es correcta.

Problema resuelto

Utilizar Gauss-Jordan para obtener el valor de las incógnitas del siguiente problema.

Mi mamá me pidió que comprara 4 kilos de naranja y 2 kilos de limón; me dio $100.00 y de cambio me dieron $20.00, pero lo que traje no alcanzó, por lo que nuevamente fui a comprar, solo que esta vez compré 2 kilos de lo primero, pero dos más de lo segundo y me gasté $100.00. Mi mamá pregunta cuánto costó cada cosa.

Sistema de ecuaciones $\begin{cases} 4x + 2y = 80 \\ 2x + 4y = 100 \end{cases}$

Respuesta

4	2	1	0	80
2	4	0	1	100

Paso 1: Obtención de la unidad (valor pivote); el primer 1 de la matriz identidad, indicará el valor a tomarse como valor pivote para dividirse.

$$\frac{4 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 80}{4} = 1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad 0 \quad 20$$

Paso 2: Obtención del cero o los ceros de columna (valores semipivotes)

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 20 \\ x & -2 & & & \\ \hline -2 & -1 & \frac{-1}{2} & 0 & -40 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 100 \\ \hline 0 & 3 & \frac{-1}{2} & 1 & 60 \end{array}$$

Paso 3: Integración de la nueva matriz y repetición del proceso.

1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	20
0	3	$\frac{-1}{2}$	1	60

Paso 1: Obtención de la unidad (valor pivote); el siguiente 1 de la matriz identidad, indicará el valor a tomarse como valor pivote para dividirse.

$$\frac{0 \quad 3 \quad \frac{-1}{2} \quad 1 \quad 60}{3} = 0 \quad 1 \quad \frac{-1}{6} \quad \frac{1}{3} \quad 20$$

Paso 2: Obtención del cero o los ceros de columna (valores semipivotes)

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & \frac{-1}{6} & \frac{1}{3} & 20 \\ x & \frac{-1}{2} & & & \\ \hline 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{12} & \frac{-1}{6} & -10 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 20 \\ \hline 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{6} & 10 \end{array}$$

Paso 3: Integración de la nueva matriz y repetición del proceso; como aquí la matriz identidad ya se ubica a la izquierda, el ejercicio terminó.

1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{6}$	$10
0	1	$\frac{-1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$20

Los resultados son: $10.00 es el precio del kilo de naranjas y $20.00 el de los limones.

Al multiplicar la matriz por la inversa se comprueba que el ejercicio es correcto.

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-1}{6} \\ \frac{-1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} + \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} + \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} + \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} + \frac{4}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De igual manera puede utilizarse para resolver sistemas de ecuaciones de tres incógnitas.

ALERTA: En la unidad 1 se planteó el siguiente problema y se resolvió aplicando dos métodos de solución; aquí aplicaremos un tercer método de Gauss-Jordan.

Problema resuelto

Un comerciante realizó sus compras de temporada; compró lápices, plumas y cuadernos. El primer día adquirió 4 cajas de lápices, 3 cajas de plumas y 2 cuadernos, pagó $350.00. El segundo día compró 1 caja de lápices, 6 cajas de plumas y 6 cuadernos, de eso fueron $500.00. Y el tercer día compró 3 cajas de lápices, 5 cajas de plumas y 2 cuadernos, pagó $450.00. ¿Cuánto costó cada uno de los artículos comprados?

Respuesta

$$\begin{cases} 4x + 3y + 2w = 350 \\ x + 6y + 6w = 500 \\ 3x + 5y + 2w = 450 \end{cases}$$

								Para dar solución observa lo siguiente:
4	3	2	1	0	0	350	R 1 =	Primer renglón
1	6	6	0	1	0	500	R 2 =	Segundo renglón
3	5	2	0	0	1	450	R 3 =	Tercer renglón
1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	$87\frac{1}{2}$	R 4 =	R 1 ÷ *pivote*
0	$\frac{21}{4}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{-1}{4}$	1	0	$412\frac{1}{2}$	R 5 =	*la división por signo contrario del semipivote* + R 2
0	$\frac{11}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-3}{4}$	0	1	$187\frac{1}{2}$	R 6 =	*la división por signo contrario del semipivote* + R 3
1	0	$\frac{-2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{-1}{7}$	0	$28\frac{4}{7}$	R 7 =	*la división por signo contrario del semipivote* + R 4
0	1	$\frac{22}{21}$	$\frac{-1}{21}$	$\frac{4}{21}$	0	$78\frac{4}{7}$	R 8 =	R 5 ÷ *pivote*
0	0	$\frac{-50}{21}$	$\frac{-13}{21}$	$\frac{-11}{21}$	1	$-28\frac{4}{7}$	R 9 =	*la división por signo contrario del semipivote* + R 6
1	0	0	$\frac{9}{25}$	$\frac{-2}{25}$	$\frac{-3}{25}$	32	R 10 =	*la división por signo contrario del semipivote* + R 7
0	1	0	$\frac{-8}{25}$	$\frac{-1}{25}$	$\frac{11}{25}$	66	R 11 =	*la división por signo contrario del semipivote* + R 8
0	0	1	$\frac{13}{50}$	$\frac{11}{50}$	$\frac{-21}{50}$	12	R 12 =	R 9 ÷ *pivote*

Los artículos adquiridos tienen un precio de:

= $ 32.00

= $ 66.00

= $ 12.00

Los resultados finales en el Gauss-Jordan.

Problema resuelto

Utilizar Gauss-Jordan para obtener el valor de las variables del sistema de ecuaciones.

$$\textit{Sistema de ecuaciones} \begin{cases} 2x + y + 2z = 1 \\ x - y + 3z = -3 \\ 2x + 2y + z = 4 \end{cases}$$

Respuesta

								Para dar solución observa lo siguiente:
2	1	2	1	0	0	1	R 1 =	Primer renglón
1	−1	3	0	1	0	−3	R 2 =	Segundo renglón
2	2	1	0	0	1	4	R 3 =	Tercer renglón
1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	R 4 =	R 1 ÷ *pivote 2*
0	$\frac{-3}{2}$	2	$\frac{-1}{2}$	1	0	$-3\frac{1}{2}$	R 5 =	*la división* R 4 *por signo contrario del semipivote* + R 2
0	1	−1	−1	0	1	3	R 6 =	*la división* R 4 *por signo contrario del semipivote* + R 3
1	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{-2}{3}$	R 7 =	*la división* R 8 *por signo contrario del semipivote* + R 4
0	1	$\frac{-4}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-2}{3}$	0	$2\frac{1}{3}$	R 8 =	R 5 ÷ *pivote* $-\frac{3}{2}$
0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{-4}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	R 9 =	*la división* R 8 *por signo contrario del semipivote* + R 6
1	0	0	7	−3	−5	−4	R 10 =	*la división* R 12 *por signo contrario del semipivote* + R 7
0	1	0	−5	2	4	5	R 11 =	*la división* R 12 *por signo contrario del semipivote* + R 8
0	0	1	−4	2	3	2	R 12 =	R 9 ÷ *pivote* $\frac{1}{3}$

El valor de las variables

$x = -4$

$y = 5$

$z = 2$

Los resultados de las incógnitas se ubican en la columna que fue agregada y siempre se encontrarán en el orden en que se presentan las ecuaciones, pudiéndose comprobar al sustituir los valores en cualquiera de las ecuaciones del sistema.

$$\begin{aligned} 2x + y + 2z &= 1 \\ 2(-4) + (5) + 2(2) &= 1 \\ -8 + 5 + 4 &= 1 \end{aligned}$$

Otra forma de calcular los valores de las variables es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 & -5 \\ -5 & 2 & 4 \\ -4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7(1) - 3(-3) - 5(4) \\ -5(1) + 2(-3) + 4(4) \\ -4(1) + 2(-3) + 3(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 + 9 - 20 \\ -5 - 6 + 16 \\ -4 - 6 + 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}$$

Problemas para resolver

Efectúa las siguientes operaciones con matrices.

6.1 $[-1 \quad 3] + [9 \quad 6]$

6.2 $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

6.3 $\begin{bmatrix} 8 & 5 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 5 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

6.4 $\begin{bmatrix} 8 & 5 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 5 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

6.5 $\begin{bmatrix} 8 & 5 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -8 & 5 & 3 \\ -2 & -6 & 4 \\ -4 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

6.6 $\begin{bmatrix} 8 & 5 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -8 & -5 & -3 \\ 2 & -6 & -4 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

6.7 $\begin{bmatrix} 8 & 5 & -3 \\ 2 & -6 & -1 \\ -4 & 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 5 & -3 \\ 2 & -5 & -1 \\ -4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

6.8 $\begin{bmatrix} -7 & 6 \\ 3 & -8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$

6.9 $\begin{bmatrix} -7 & 6 \\ 3 & -8 \end{bmatrix} + [-2 \quad 6 \quad 7]$

6.10 $[-1 \quad 3] + [-2 \quad 6 \quad 7]$

Obtén la matriz resultante de las siguientes operaciones.

6.11 $A = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

a) $2A + B$

b) $A + 2B$

c) $2A + 2B$

d) $2A - B$

e) $A - 2B$

f) $2A - 2B$

g) $2A + B - C$

h) $2A - B + 3D$

i) $3A - 2B + C + 4D$

j) $A - 2B + 2C - 3D$

6.12 $4\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

6.13 $4\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

Calcula los siguientes productos de matrices (en caso de que sea posible).

6.14 $[\,6 \quad 2\,]\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}$

6.15 $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$

6.16 $[\,1 \quad 2 \quad 3\,]\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

6.17 $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 6 & -6 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}$

6.18 $\begin{bmatrix} -3 & 8 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

6.19 $\begin{bmatrix} -3 & -8 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -6 & -7 \end{bmatrix}$

6.20 $[\,1 \quad 2 \quad 3\,]\begin{bmatrix} 2 & -5 & -2 \\ 6 & -6 & -3 \\ 5 & -8 & -7 \end{bmatrix}$

6.21 $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}[6]$

6.22 $[\,1 \quad 2 \quad 3\,]\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

6.23 $\begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 6 & -6 & -3 \\ 5 & -9 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 6 & 5 \\ -4 & -6 & -9 \\ -2 & -3 & -7 \end{bmatrix}$

Realiza los siguientes productos de matrices. En caso de no ser posible utiliza la matriz transpuesta.

6.24 $\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}[\,1 \quad 2\,]$

SR Problemas aplicados a la realidad T Problemas para resolver con tecnología

6.25 $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$

6.26 $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

6.27 $\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 6 & -6 \\ 5 & -8 \end{bmatrix}$

6.28 $\begin{bmatrix} 2 & -5 & -2 \\ 6 & -6 & -3 \\ 5 & -8 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

6.29 [5][3 2 1]

6.30 $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 8 & 7 \\ 3 & 6 & 9 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & -1 \\ 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

6.31 $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & -1 \\ 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

6.32 $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 8 & 7 \\ -1 & 2 & 7 & 1 \\ 3 & 9 & 5 & 4 \\ 4 & 8 & 2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & -1 \\ 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

Obtén el determinante de las siguientes matrices.

6.33 $\begin{bmatrix} -3 & -8 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$

6.34 $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$

6.35 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -50 & 6 \end{bmatrix}$

6.36 $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 6 & 6 \\ 5 & 8 & 3 \end{bmatrix}$

6.37 $\begin{bmatrix} -2 & -5 & -7 \\ -6 & -6 & -6 \\ -5 & -8 & -3 \end{bmatrix}$

6.38 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 9 & 2 & 10 \\ 5 & 7 & 3 \end{bmatrix}$

6.39 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 9 & 2 & 10 \\ 5 & 8 & 3 \end{bmatrix}$

6.40 $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 10 & 35 & 10 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

6.41 $\begin{bmatrix} 6 & 5 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 8 & 3 \end{bmatrix}$

6.42 $\begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & 5 & \frac{5}{4} \\ 1 & -1 & 1 \\ \frac{-6}{5} & 9 & \frac{7}{4} \end{bmatrix}$

Obtén la matriz de cofactores de las siguientes matrices.

6.43 $\begin{bmatrix} -3 & -8 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$

6.44 $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$

6.45 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -50 & 6 \end{bmatrix}$

6.46 $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 6 & 6 \\ 5 & 8 & 3 \end{bmatrix}$

6.47 $\begin{bmatrix} -2 & -5 & -7 \\ -6 & -6 & -6 \\ -5 & -8 & -3 \end{bmatrix}$

6.48 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 9 & 2 & 10 \\ 5 & 7 & 3 \end{bmatrix}$

6.49 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 9 & 2 & 10 \\ 5 & 8 & 3 \end{bmatrix}$

6.50 $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 10 & 35 & 10 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

6.51 $\begin{bmatrix} 6 & 5 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 8 & 3 \end{bmatrix}$

6.52 $\begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & 5 & \frac{5}{4} \\ 1 & -1 & 1 \\ \frac{-6}{5} & 9 & \frac{7}{4} \end{bmatrix}$

Obtén la inversa de las siguientes matrices.

6.53 $\begin{bmatrix} -3 & -8 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$

6.54 $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$

6.55 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -50 & 6 \end{bmatrix}$

6.56 $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 6 & 6 \\ 5 & 8 & 3 \end{bmatrix}$

6.57 $\begin{bmatrix} -2 & -5 & -7 \\ -6 & -6 & -6 \\ -5 & -8 & -3 \end{bmatrix}$

6.58 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 9 & 2 & 10 \\ 5 & 7 & 3 \end{bmatrix}$

6.59 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 9 & 2 & 10 \\ 5 & 8 & 3 \end{bmatrix}$

6.60. $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 10 & 35 & 10 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

6.61 $\begin{bmatrix} 6 & 5 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 8 & 3 \end{bmatrix}$

6.62 $\begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & 5 & \frac{5}{4} \\ 1 & -1 & 1 \\ \frac{-6}{5} & 9 & \frac{7}{4} \end{bmatrix}$

6.63 $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

6.64 $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$

6.65 $\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$

6.66 $\begin{bmatrix} -6 & -2 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$

6.67 $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

6.68 $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

6.69 $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

6.70 $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

6.71 $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

6.72 $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones simultáneas.

6.73 $8x - 2y = 14$
$2x + 4y = 10$

6.74 $8x - 2y = 6$
$y = 8 + 2x$

6.75 $5x = 10$
$4y = 6 - 2x$

6.76 $5a + 2b + 5c = 1$
$a + 2b - 4c = 2$
$5a - b + 2c = 10$

6.77 $-a + 3b + 5c = 80$
$-2a + b = 50$
$a + 8b + 8c = 45$

6.78 $5x + 5w = 35$
$2y - 4w = 50$
$5x - 1y + 2w = 45$

6.79 En una oficina, para desayunar una persona compra 5 cafés y una torta de tamal; paga $100.00, en la tarde esa misma persona compra 1 café y cuatro tortas de tamal pero en esta ocasión paga $115.00. ¿Cuánto cuesta el café?

SR Problemas aplicados a la realidad T Problemas para resolver con tecnología

6.80 Una persona que vende cocteles compra fruta por kilos y en la mañana compra un kilo de naranja, dos kilos de plátano y uno de manzana y paga $55.00. En la tarde compra un kilo de naranja, un kilo de plátano y uno de manzana. paga $45.00, en la noche compra tres kilos de la primera fruta, dos de la segunda y solo uno de la tercera, pagando en esta ocasión $65.00.

Si siempre compró con la misma persona y los precios a lo largo del día son los mismos, determina el costo de cada kilo de fruta.

PROBLEMAS RETO

Indica el valor de cada una de las variables.

1 En una agencia de autos hay 70 vehículos de dos y cuatro puertas. Si el total de las puertas que se cuentan son 224, ¿cuántos vehículos habrá de dos y cuatro puertas?

2 En un comedor industrial se sirven 105 desayunos, pero hay dos opciones a escoger, la primera es solicitarlo sencillo, la otra es pagar $5.00 adicionales y acompañarlo con un café. Si el desayuno sencillo tiene un costo de $35.00 y al cambiar de turno la cajera entrega $3 885.00, ¿cuántos desayunos debe reportar en su informe que se sirvieron sencillos y cuántos con café?

3 En una tienda de mascotas un patrón le dejó a su empleado la siguiente nota:

> Buen día. Te informo que entre peces, pollos y perritos tenemos 21 animales, el número de patas de los animales suma 24 y los costos de cada uno son los siguientes: cada pez tiene un costo de $15.00, un pollito cuesta $25.00 y el perrito, que es el más costoso, vale cada uno $100.00; si vendes todos los animales me tienes que entregar $630.00.
>
> Paso en la tarde por lo de la venta del día, mucho cuidado, te veo en un rato.

¿El empleado se pregunta cuántos animales habrá de cada uno?